

機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 1-1: 機率概論
- 1-2: 集合論
- 1-3: 機率名詞介紹



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



1-1: 機率概論

第一週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

機率範例



- 丟銅板看到正面機率為 0.52
- 明天下雨機率為 60%
- 丟四顆骰子得到一色的機率為 1/216
- 那...椅子單腳站三天三夜的機率為？



我和我的小伙伴们都惊呆了！



yes123求職網 | 新聞發言台 | 爆料

自由時報 電子報
The Liberty Times ‧社會新聞

自由新聞 | 影音娛樂 | 讀者園地 | 旅遊玩樂 | 好康報報 | TAIPEI TIMES | Blog | 新聞

- 頭版新聞
- 證券表格
- 焦點新聞
- 政治新聞
- 社會新聞
- 生活新聞
- 國際新聞
- 愛心暖流
- 自由言論
- 爆料投訴
- 財經新聞
- 體育新聞
- 運動彩券
- 教育新聞
- 健康醫療
- 地方新聞
- 影視名人
- 流行消費
- 藝術文化
- 生活副刊

首頁 > 社會新聞

2009-2-10

字型：+ − | 看推薦 | 發言 | 列印 | 轉寄

奇…神轎單腳站3天

新竹縣北埔鄉水石祭村順天宮6日深夜辦法事時，住持溫振松突然起乩，隨手拿碗蓋在桌上，讓小神轎單腳站立，持續3天3夜後，獲神明同意才請下來。消息傳出，信眾嘖嘖稱奇，北埔鄉代會主席姜良明說，這如同擲出立筊一樣罕見。

（圖文：記者陳儀珊）



新竹縣北埔鄉水石祭村順天宮6日深夜辦法事時，住持溫振松突然起乩，隨手拿碗蓋在桌上，讓小神轎單腳站立，持續3天3夜後，獲神明同意才請下來。消息傳出，信眾嘖嘖稱奇，北埔鄉代會主席姜良明說，這如同擲出立筊一樣罕見。
（圖文：記者陳儀珊）



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

先忘了被惊呆了小伙伴们...



- 機率 = 0.6 代表什麼意思？
- 在回答這個問題前我們先問：
  - 距離 = 1.23 公尺是什麼意思？

    代表 $1.23 \times \frac{1}{299792458}$ 秒中光所走的距離

  - 時間 = 8.2 秒是什麼意思？

    代表 8.2×919263170 倍的銫原子震盪週期



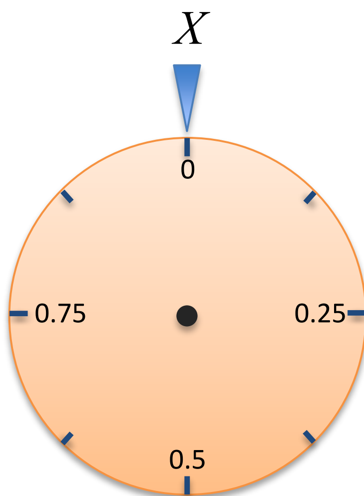
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我們該怎麼理解機率 = 0.6?



幸運之輪
Wheel of Fortune

（圓周長度為 1 ）





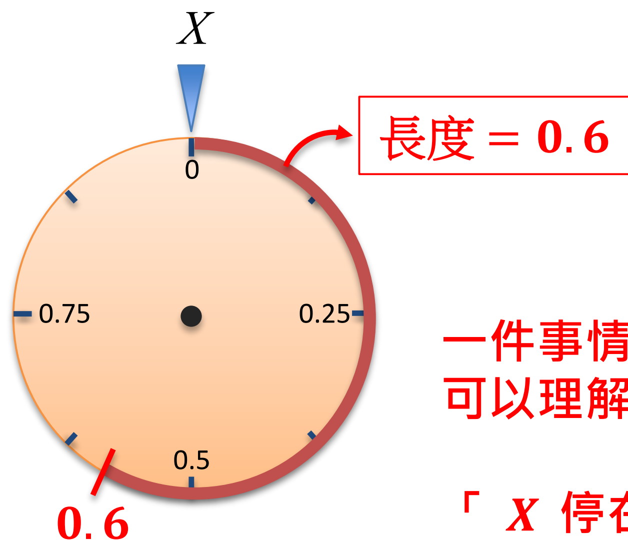
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我們該怎麼理解機率 = 0.6?



幸運之輪
Wheel of Fortune

（圓周長度為 1 ）



長度 = 0.6

一件事情發生的機率 = 0.6
可以理解為可能性跟幸運之輪

「 X 停在長度為 0.6 的紅邊上」

這件事情發生機率是一樣的！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

為什麼我們要研究機率？



- 我們對這個世界了解的太少
  這世界的運作有很多是未知的
- 世間事不見得都是必然的（deterministic）
  有很多事情是有隨機性的（random）



機率與統計的差異



- 機率：
  - 機率模型已知，要學會怎麼算某些事件的機率
  - Ex: 已知一骰子為公平骰，看到偶數的機率為何？
- 統計：
  - 機率模型未知，要學會怎麼從大量的實驗結果中去建立機率模型
  - Ex: 不知一骰灌鉛否，欲知各點出現之機率模型？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



1-2: 集合論

第一週

「學生上課不規矩」的機率＝0.1

P(學生上課不規矩)＝0.1

機率函數的自變數是：事件，而事件，是一種集合



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合論名詞複習



- 元素 (Element)
  - Ex: 小黑、小冀、小湘、小鄂、小美
- 集合 (Set)
  - Ex: 鹹豆腐腦黨 A = {黑, 冀}
  - Ex: 甜豆腐腦黨 B = {湘, 鄂}
- 子集合 (Subset)
  - Ex: 嫌鹹黨 C = {湘, 鄂, 美}
  - B 是 C 的子集，表示為：$B \subset C$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合論名詞複習



- 宇集 (Universal Set)
  - Ex: S = {黑, 冀, 湘, 鄂, 美}
- 空集合 (Empty Set)
  - Ex: ϕ = { }
- 交集 (Intersection)
  - Ex: 喜歡甜豆腐腦且鹹豆腐腦者 = $A \cap B = \{\ \} = \phi$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合論名詞複習



- 聯集 (Union)
  - Ex: 喜歡甜豆腐腦**或**鹹豆腐腦者 =

$$A \cup B = \{\text{黑, 冀, 湘, 鄂}\}$$

- 補集 (Complement)
  - Ex:嫌鹹黨 C = 鹹黨 A 之補集 $C = A^c$
- 差集 (Difference)：$X - Y$ = {有在 X 但不在 Y 中的東西}
  - Ex:嫌鹹黨－甜黨 = $C - B = \{\text{美}\}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

集合論名詞複習



- 不相交 (Disjoint)：

  如果 $X \cap Y = \phi \rightarrow X, Y$ 不相交

  – Ex:

    甜黨∩鹹黨 = { }, 亦即甜黨、鹹黨不相交

- 互斥 (Mutually Exclusive)：若一群集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 中任選兩個集合 X_i, X_j 都不相交，則我們稱 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 這群集合互斥

  – Ex: 甜黨、鹹黨、小美黨，三者兩兩不相交，故三者互斥!



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

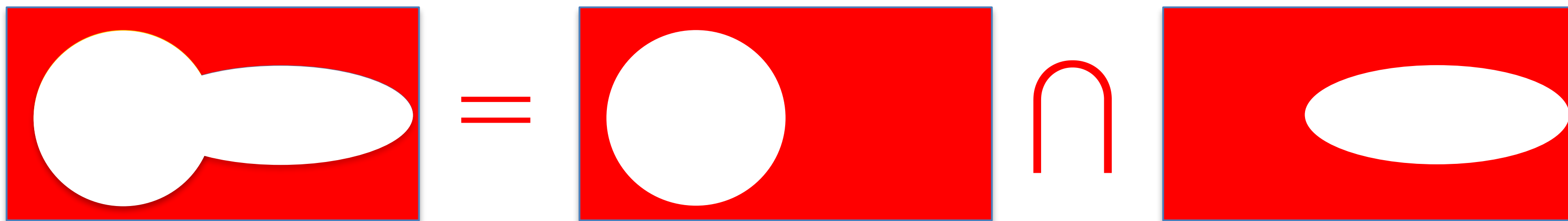
De Morgan's Law 定理



- De Morgan's Law：

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

  - Ex:





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

De Morgan's Law 證明



- De Morgan's Law：

$$\boxed{(A \cup B)^C = A^C \cap B^C}$$

- 證明：

$\rightarrow$:

Assume $x \in (A \cap B)^c$

$\Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A$ *and* $x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c$ *and* $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow \boxed{(A \cap B)^c \subset (A^c \quad B^c)}$

$\leftarrow$:

Assume $x \in A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \notin A$ *and* $x \notin B$

If $x \notin (A \cap B)^c$

$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ *or* $x \in B$ $\rightarrow\leftarrow$

Thus $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow \boxed{(A^c \quad B^c) \subset (A \quad B)^c}$





1-3: 機率名詞

第一週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

實驗 (Experiment)



- 一個機率「實驗」包含了：
  步驟 (procedures)、模型 (model)、觀察(observations)
  - Ex: 丟兩公平骰
    - 步驟：「伸手取起桌上二骰，緊握後，手微微開口後向內吹口氣。之後默禱，再將骰丟入碗中，直至停止為止。」
    - 模型：(1, 1)、(1, 2) 、…、(6, 6) 等發生機會均等
    - 觀察：(6, 6)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

結果 (Outcome)



- 「結果」是實驗中可能的結果
  - Ex: 約心儀店員

    成功、失敗

  - Ex: 看到華南虎

    立體的、平面的

  - Ex: 轉幸運之輪

    $X = 0.4008823823 \ldots$、$X = 0.0800080080 \ldots$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

樣本空間 (Sample Space)



- 「樣本空間」是機率實驗所有可能的結果的集合，通常用 S 來表示
  - Ex: 約心儀店員

$$S = \{ \text{成功、失敗} \}$$

  - Ex: 連丟三次銅板，記錄正反面結果

$$S = \{ \text{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} \}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

樣本空間 (Sample Space)



- Ex: 幸運之輪轉一次

$$S = [0, 1)$$

- Ex:幸運之輪轉兩次

$$S = [0, 1) \times [0, 1)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件 (Event)



- 「事件」指的是對於實驗結果的某種敘述。
- 機率就是在講實驗結果符合某事件敘述的機會多大
- 在數學上，「事件」可以看成是「結果」的集合，亦即是「樣本空間」的子集。
  - Ex:台大生的上課出席狀況
    - 「結果」有哪幾種：準時、遲到、曠課
    - 事件1：有出席；E_1= {準時、遲到}
    - 事件2：沒規矩；E_2= {遲到、曠課}



事件 (Event)



（小明點數、小華點數）

- Ex: 小明、小華各丟一次公平骰，比點數大小，大者贏
  - 事件1：小明贏；$E_1 =$

    $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$
  - 事件2：小華贏；$E_2 =$

    $\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}$
  - 事件3：平手；$E_3 =$

    $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

對於一個實驗而言，究竟有多少個可能的事件呢？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空間 (Event Space)



– Ex: 台大生上課出席
  - $S=$ {準時、遲到、曠課}
– 「事件空間」=

{ { }, {準時}, {遲到}, {曠課},
{準時, 遲到}, {遲到, 曠課}, {準時, 曠課},
{準時, 遲到, 曠課} }



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空間 (Event Space)



- 「事件空間」是包含所有事件的集合
- 若「樣本空間」$S = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ 有 n 個「結果」
  - 「事件空間」＝

$$\left[\begin{array}{l} \{\ \}, \{o_1\}, \{o_2\}, \dots, \{o_n\}, \\ \{o_1, o_2\}, \{o_1, o_3\}, \{o_1, o_n\}, \{o_2, o_3\}, \dots, \{o_2, o_n\}, \dots, \{o_{n-1}, o_n\}, \\ \{o_1, o_2, o_3\}, \dots, \{o_1, o_2, o_3, o_4\}, \dots, \{o_1, o_2, \dots, o_{n-1}\}, \dots. \{o_1, o_2, \dots, o_n\} \end{array}\right]$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

事件空間 (Event Space)



- 機率是一個函數，其自變數是：

P(事件) = 0.6 ⇒ 機率函數的自變數是：事件！

- 所以機率可以看成是一個映射

機率函數是從「事件空間」映射到 [0, 1]

P:「事件空間」→ [0, 1]



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題回顧



- 1-1: 機率概論
  - 如何理解機率 = 0.6 的意義?
- 1-2: 集合論
  - 集集復集集、不相交、互斥、De Morgan's Law
- 1-3: 機率名詞介紹
  - 實驗、結果、樣本空間、事件、事件空間
  - 機率函數的本質：
    它是事件的函數 (你給一個事件，它吐回一個數字給你)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述

- 2-1: 機率公理性質
- 2-2: 條件機率





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



2-1: 機率公理性質

第二週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理 (Axioms)



- 近代數學常以數條公理作為整套理論的基石
  - Ex: 線性代數 **8 公理，公理一：$a+b=b+a$ ...**
- 這樣的好處是？ **頭過身就過啊！(容頭過身 –後漢書西羌傳)**
- 公理可否被證明？ **公理常是不能被證明的基本性質**
- 公理為何常被當廢話？ **公理常是非常基本的性質**
- 什麼樣的數學最厲害？ **公理越少條、公理越基本，越厲害！**



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

機率三公理 (Axioms of Probability)



- 公理 1:

  對任何事件 A 而言, $P(A) \geq 0.$

- 公理 2:

  $$P(S) = 1$$

- 公理 3:

  事件 $A_1, A_2, \ldots$ 互斥 $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots$

神聖三公理



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理 3 搭起了集合運算與機率運算的橋樑！

公理衍生之機率性質



Ex: 從一副 52 張撲克牌抽中一張，結果為 Ace 之機率為何？

$Ace = \{ A♠, A♥, A♦, A♣ \}$

$\Rightarrow P(Ace) = P\{A♠\} + P\{A♥\} + P\{A♦\} + P\{A♣\}$

↑ 公理 3

$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



- 若 $E = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$

  則 $P(E) = P(\{o_1\}) + P(\{o_2\}) + \cdots + P(\{o_n\})$

證明： $E = \{o_1\} \cup \{o_2\} \cup \cdots \cup \{o_n\}$

因 $\{o_1\}, \{o_2\}, \dots, \{o_n\}$ 互斥

$\Rightarrow P(E) = P(\{o_1\}) + P(\{o_2\}) + P(\{o_3\}) + \cdots$

↑公理 3



公理衍生之機率性質



- $P(\phi) = 0$

證明：$S \cap \phi = \phi \Rightarrow S, \phi$ 互斥

加以 $S = S \cup \phi$

$\Rightarrow P(S) = P(S \cup \phi) = P(S) + P(\phi)$

↑ 公理 3

$\Rightarrow P(\phi) = 0$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



- $P(A) = 1 - P(A^c)$

證明：$A \cap A^c = \phi \Rightarrow A, A^c$ 互斥

加以 $S = A \cup A^c$

$\Rightarrow P(S) = P(A) + P(A^c)$

↑ 公理 3

$\Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$

↑ 公理 2

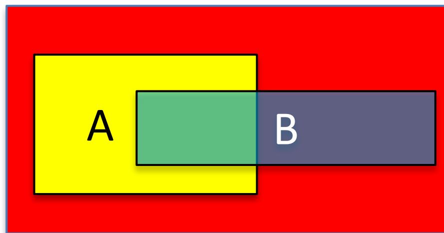


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



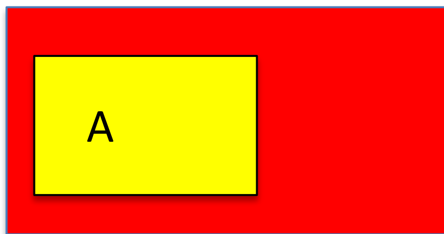
- $P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$



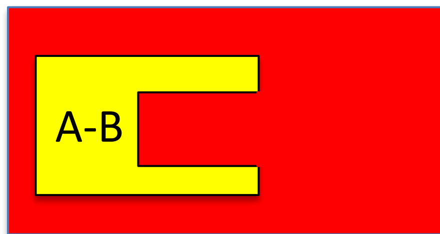
$A = (A-B) \cup (A\cap B)$

$\Rightarrow P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$

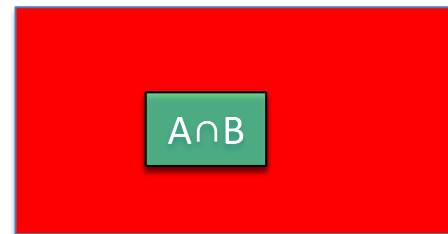
↑公理 3



$=$



$\cup$



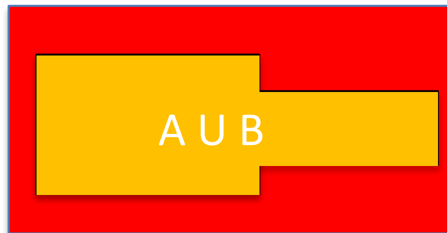


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質

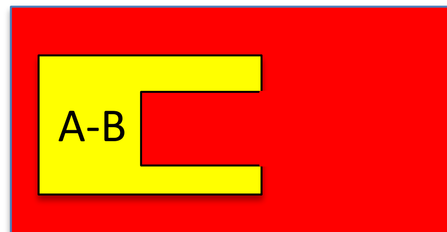
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$





$$P(A \cup B)$$
$$= \underbrace{P(A-B)}_{P(A)-P(A\cap B)} + \underbrace{P(A\cap B) + P(B-A)}_{P(B)}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

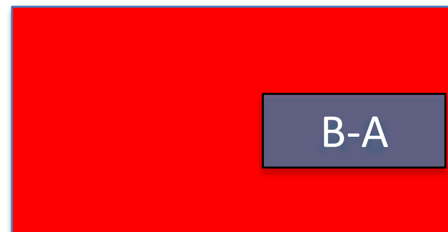
=



∪



∪





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



- $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
  - Ex: 在大陸隨便碰上一個人，此人愛甜豆花**或**愛鹹豆花機率為何？

$\boldsymbol{P}$(愛甜∪愛鹹) $=$ $\boldsymbol{P}$(愛甜) $+$ $\boldsymbol{P}$(愛鹹) $-$ $\boldsymbol{P}$(愛甜∩愛鹹) $= \cdots$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質

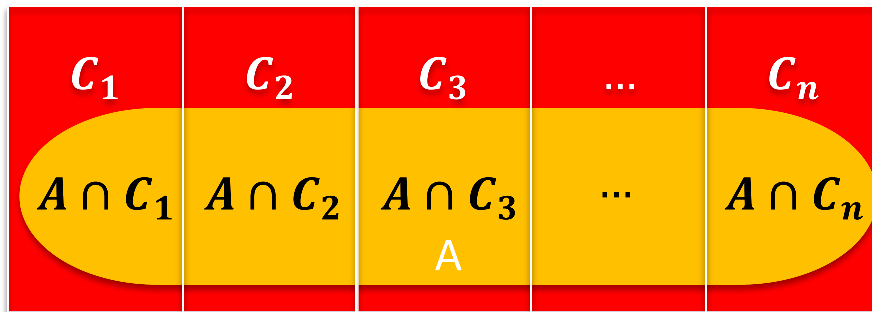


- 切麵包定理：

  若 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n = S$

  則對任何事件 A：$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \cdots + P(A \cap C_n)$

  ↑ 公理 3





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



– Ex: 阿宅心儀某可愛女店員。她的笑容打開了他封閉的心。阿宅注意到她笑容會受生意的影響，於是每天忠實記錄該店生意與她有無對他笑。店生意有滿、普、慘三態，而她有笑、怒二態。根據記錄：

$$S=\begin{Bmatrix}(滿\cap笑)\rightarrow\frac{1}{20},(滿\cap怒)\rightarrow\frac{2}{20}\\(普\cap笑)\rightarrow\frac{5}{20},(普\cap怒)\rightarrow\frac{4}{20}\\(慘\cap笑)\rightarrow\frac{5}{20},(慘\cap怒)\rightarrow\frac{3}{20}\end{Bmatrix}$$

滿
普
慘
滿∩笑
普∩笑
慘∩笑
笑

$$\Rightarrow P(笑)=\frac{1}{20}+\frac{5}{20}+\frac{5}{20}=\frac{11}{20}$$

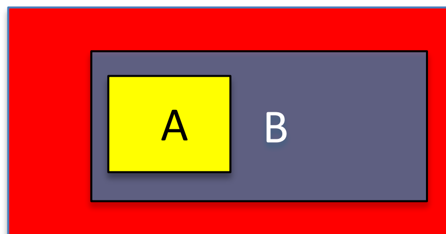


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

公理衍生之機率性質



- 若 $A \subset B$, 則 $P(A) \leq P(B)$.



證明：*BJ4*，同學自己試試看



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Boole's 不等式



- 對任意 n 個事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 而言,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

證明：*BJ4*，高手自己試試看



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Bonferroni's 不等式



- 對任意 n 個事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 而言，

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

證明：*BJ4*，高手自己試試看



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 公理的意義是什麼？
- 為何機率三公理很神聖？
- 機率公理如何衍生各樣的性質？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



2-2: 條件機率

第二週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

概述與範例



- 機率常反映我們對某些事情的了解程度
  - Ex: 沒念書的混哥，對其而言，考試選擇題正解為 A 或 B 或 C 或 D 的機率皆為 1/4
  - Ex: 有念書的卷哥，對其而言，考試選擇題正解為 A 之機率非 1 即 0



概述與範例



- 在得知其他某些事情發生後，
  我們對事情的了解可能會有所改變
  - Ex: 混哥坐卷哥隔壁，見到



  - 在此事發生後，對混哥而言B、D為正解機率為？（此即為「條件機率」）



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率 (Conditional Probability)



- 更精準的來說，條件機率的表示法：$P(X \mid Y)$

  X：所關心之事件

  Y：條件(觀察到的, 已發生的事件)

前例：$P($ B 為正解 | $)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率怎麼算？



- $P($ B 為正解 $|$ 卷矯漏曲$) = ?$
  - 未偷看時，正確答案未知。樣本空間為：

$$S = \{A, B, C, D\}$$

  - 卷矯漏曲後，新的樣本空間變為：

$$S' = \{B, D\}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率怎麼算？



- 卷矯漏之條件發生後，這世界變了，有了新的天地。不符合卷矯漏條件的 outcome 都不可能發生了。

$$P(\text{A 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) = P(C\text{ 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) = 0$$

  – 延伸：若某實驗結果 o_i 與某條件 Y 不相交，則

$$P(o_i \mid Y) = 0$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率怎麼算？



- 至於卷矯漏曲之條件事件發生後，符合卷矯漏曲條件事件的實驗結果的機率呢？
  - 不管卷矯漏曲發生否，「B為正解」與「D為正解」機率比例應該一樣，故：

$$P(\text{B 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) : P(D\text{ 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) = P(\text{B 為正解}) : P(D\text{ 為正解})$$

  - 卷矯漏曲後只有可能出現「B 為正解」或「D 為正解」，故：

$$S' = \{B, D\},\ P(\text{B 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) + P(D\text{ 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) = 1$$

  - 根據上述二式我們得到

$$P(\text{B 為正解} \mid \text{卷矯漏曲}) = \frac{P(\text{B 為正解})}{P(\text{B 為正解}) + P(\text{D 為正解})} = \frac{P(\text{B 為正解})}{P(\text{卷矯漏曲})}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率怎麼算？



- 延伸：若某條件事件 Y 包含數個實驗結果：

$$Y = \{o_1, o_2, \ldots o_n\}$$

$$P(o_i|Y) = \frac{P(o_i)}{P(o_1) + P(o_2) + \cdots + P(o_n)} = \boxed{\frac{P(o_i)}{P(Y)}}$$

考慮某事件 $X = \{o_1, o_2, q_1, q_2\}$，已知條件事件$Y = \{o_1, o_2, o_3\}$ 發生了，則

$$\boxed{P(X|Y) = P(o_1|Y) + P(o_2|Y) = \frac{P(o_1)}{P(Y)} + \frac{P(o_2)}{P(Y)} = \frac{P(\{o_1, o_2\})}{P(Y)} = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}}$$



條件機率怎麼算？



- 終極延伸：若已知某條件事件 Y 發生了，則對於任何事件 X ，我們可計算其條件機率如下：

$$P(X \mid Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

※ "*condition on,*" "*Suppose,*" "*if,*" "*Assuming,*" "*given that*"



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

概述與範例



- Ex: 小美同時與小明、小華、小園暗通款曲。
  - Q: 小華贏得小美芳心機率為？

    $\frac{1}{3}$

  - Q: 美生日，華夜攜禮至美宅。美不在，華遂於門外候之。子時忽聞美、明於里外爭吵，遂匿而窺之。未料，突見美巴明，甩門。明，泣不成聲，而華竊喜。

    請問在美巴明發生後小華贏得小美芳心機率為？

$$P(\text{華贏美心} \mid \text{美巴明}) = \frac{1}{2}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率之性質



- 對任何事件 X 及任何條件事件 Y ，我們有：
  - 性質 1：$P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)\geq 0}{P(Y)>0} \geq 0$ (*if P(Y)=0, then P(X|Y)=0*)
  - 性質 2 ：$P(Y|Y) = \frac{P(Y\cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y)}{P(Y)} = 1$
  - 性質 3 ：A, B 互斥 $\Rightarrow P(A\cup B\,|Y) = \frac{P(A\cap Y)}{P(Y)} + \frac{P(B\cap Y)}{P(Y)} = P(A|Y) + P(B|Y)$



Total Probability 定理



- 若 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = S$

  則對任意事件 A ，我們有：

  $$P(A) = P(A \mid C_1)\,P(C_1) + P(A \mid C_2)\,P(C_2) + \cdots + P(A \mid C_n)\,P(C_n)$$

C_1	C_2	C_3	…	C_n
$A \cap C_1$	$A \cap C_2$	$A \cap C_3$	…	$A \cap C_n$

A

證明：切麵包定理 $\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap C_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid C_i) \cdot P(C_i)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Total Probability 定理



- Ex: 阿宅 vs. 可愛店員：店員對阿宅笑否，

  受店的生意影響很大。

  已知 $P(滿)=\frac{1}{4}, P(普)=\frac{1}{4}, P(慘)=\frac{1}{2}$

  $P(笑\mid 滿)=\frac{1}{6}, P(笑\mid 普)=\frac{2}{6}, P(笑\mid 慘)=\frac{3}{6}$

  問 $P(笑)=?$

滿	普	慘
滿∩笑	普∩笑	慘∩笑

笑

A: 笑　C_1: 滿　C_2: 普　C_3: 慘

$$P(笑)=\sum_{i=1}^{3} P(A|C_i)\cdot P(C_i)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{6}{24}=\frac{9}{24}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

貝氏定理 (Bayes' Rule)



- 若 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 互斥且 $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = S$

  則對任意事件 A，我們有：

$$P(C_j \mid A) = \frac{P(A \mid C_j)\, P(C_j)}{P(A \mid C_1)\, P(C_1) + P(A \mid C_2)\, P(C_2) + \cdots + P(A \mid C_n)\, P(C_n)}$$

$$\parallel$$

$$\frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid C_j) \cdot P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i) \cdot P(C_i)}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

貝氏定理 (Bayes' Rule)



- Ex: 一日，老闆見可愛店員笑，
  請問在此情況下，當日生意滿座之機率為何？

$$P(\text{滿} \mid \text{笑}) = \frac{P(\text{笑} \cap \text{滿})}{P(\text{笑})}$$

$$= \frac{P(\text{笑} \mid \text{滿}) \cdot P(\text{滿})}{P(\text{笑} \mid \text{滿}) \cdot P(\text{滿}) + P(\text{笑} \mid \text{普}) \cdot P(\text{普}) + P(\text{笑} \mid \text{慘}) \cdot P(\text{慘})}$$

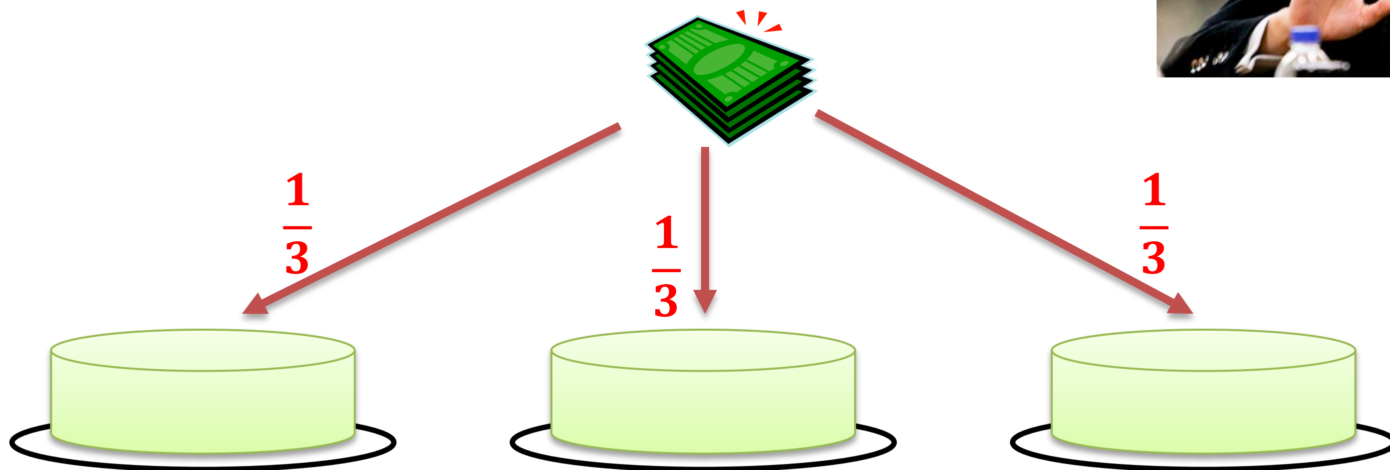
$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

進擊的鈔票



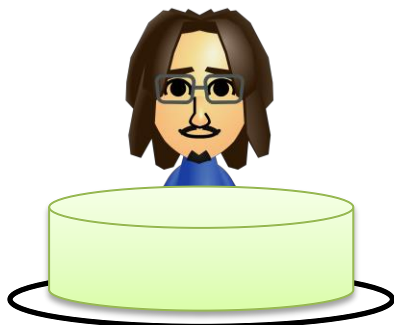


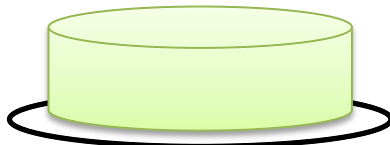


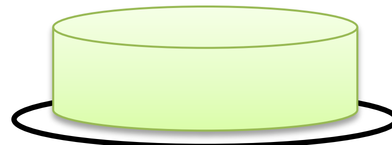
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

進擊的鈔票







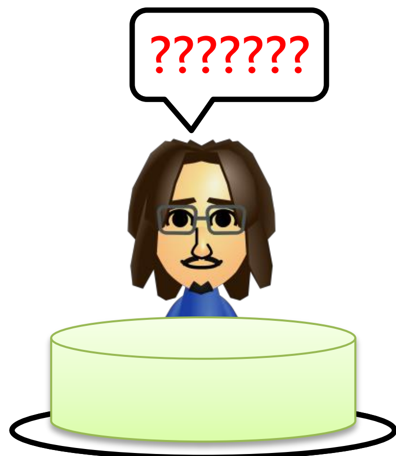


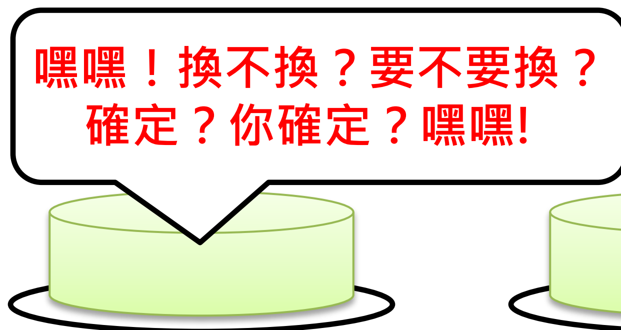


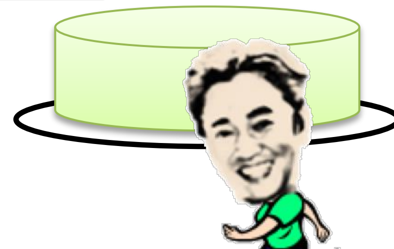
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

憲哥的逆襲！









丙紳和他的小夥伴們，究竟該換呢？還是不該換呢？還是沒差呢？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 條件機率的意義？
- $P(X \mid Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$
- 貝氏定理



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 3-1: 機率的獨立性
- 3-2: 圖解繁複機率
- 3-3: 數數算機率



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



3-1: 機率的獨立性

第三週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

機率的獨立性 (Independence)



- 常見定義：若兩事件A、B之機率滿足

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

則A、 B 兩事件稱為機率上的獨立事件。



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Mmm…到底什麼叫獨立呢？



- 天冷、老媽、穿衣服…超中二！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

另一個更好的定義



- 常見定義：若兩事件A、B之機率滿足

$$P(A \mid B) = P(A)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

則A、B兩事件稱為機率上的獨立事件。



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

範例



- 已知某生秦始皇作業表現與機率作業表現相互獨立。若秦始皇作業未作機率為 0.2，機率作業未作機率為 0.3。問兩科作業同時未作之機率為？

$$0.2 \times 0.3 = 0.06$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

範例：水源阿伯的逆襲！！







台大學生最敬畏的水源阿伯們

範例：水源阿伯的逆襲！！



- 已知某校生愛亂停車。水源阿伯拖車時常有車主趕回求情。出現憤宅求情之機率為0.3。一般而言被人求情阿伯會放行的機率為 0.2 。水源阿伯，大公無私，天下皆知。問某日阿伯拖某車時出現憤宅求情且車未放行的機率？

$P = 0.3$　　$P = 1 - 0.2 = 0.8$

$$0.3 \times 0.8 = 0.24$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

範例：古錐姊 vs. 水源阿伯



- 某古錐姊有時會在活大停車不當。被拖時若及時趕回求情，古錐姊常一手摀嘴，一手指著車曰：「啊，那是我的車！」巧笑倩兮。
- 若以 A 代表古錐姊即時趕回求情之事件，B 代表阿輩放回古錐姊車的事件。根據某憤宅多日觀察古錐姊行為：

P(古錐姊未能求情 且 車未放行) = 0.85 **P(古錐姊未能求情 且 車放行) = 0.05**

P(古錐姊及時求情 且 車未放行) = 0.01 **P(古錐姊及時求情 且 車放行) = 0.09**

= ~~P(古錐姊求情) × P(車放行)?~~

憤宅淚眼悲憤控訴阿伯：「你不公平！！！」。

問：水源阿伯清譽，豈容憤宅任意污衊！憤宅悲憤有理否？吾人該否為其一掬同情之淚？

{古錐姊求情} = {古錐姊求情 且 車未放行} ∪ {古錐姊求情 且 車放行}

P(古錐姊求情) = 0.01 + 0.09 = 0.1

前頁曾述一般而言：P(車放行) = 0.2

⇒ P(古錐姊求情) × P(車放行) = 0.1 × 0.2 = 0.02 ≠ 0.09 不獨立！

$$P(\text{車放行}|\text{古錐姊求情}) = \frac{P(\text{古錐姊求情 且 車放行})}{P(\text{古錐姊求情})} = \frac{0.09}{0.1} = 0.9$$

多事件之獨立



- 若事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$滿足下列條件，則稱此 n 事件獨立 $(n > 2)$：

  從中任選 m 事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ 均滿足

  $$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}),\ m = 2, 3, \ldots, n.$$

Ex: $n = 5,\ A_1, A_2, \ldots, A_5$

$m = 2$: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$? $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$? …

$m = 3$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$? …

$m = 4$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$? …

$m = 5$: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$?

全都相等⇒此五事件獨立　　有任一不相等⇒此五事件不獨立

$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 3-1: 機率的獨立性
  - 哪兩種定義？
  - 如何判斷事件之間是否機率上相互獨立？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



3-2: 圖解繁複機率

第三週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當碰到很複雜的機率問題時...



- 先觀察這個問題的實驗結構
- 這實驗是否能分解成數個子實驗？
- 若可以，則可以利用圖解法！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

範例：兄弟情



- 明、華兄弟情篤。故決定一人放棄追求小美以免傷情誼。於罐中放入兩白球、一黑球。遊戲規則如下：「猜拳決定誰先，之後輪流罐中取球；每次可取一至二球，直至有人抽中黑球為止。抽中黑者退出追求。」
- 已知猜拳輸贏機率為 0.5，每次明取球取一顆之機率為 0.4，取兩顆機率為 0.6 。每次華取球取一顆之機率為 0.7，取兩顆機率為 0.3。
- 問最後小明退出追求之機率為？



範例：兄弟情



- 猜拳
  - 0.5 明贏
    - 0.4 明抽一球
      - 1/3 明：黑
      - 2/3 明：白
        - 0.7 華抽一球
          - 1/2 華：白 → 1 → 明再抽一球，明：白、黑
          - 1/2 華：黑
        - 0.3 華抽二球，華：白、黑
    - 0.6 明抽二球
      - 2/3 明：白、黑
      - 1/3 明：白、白 → 1 → 華抽一球，華：黑
  - 0.5 明輸
    - 0.7 華抽一球
      - 1/3 華：黑
      - 2/3 華：白
        - 0.4 明抽一球
          - 1/2 明：白 → 1 → 華再抽一球，華：白、黑
          - 1/2 明：黑
        - 0.6 明抽二球，華：白、黑
    - 0.3 華抽二球
      - 2/3 華：白、黑
      - 1/3 華：白、白 → 1 → 明抽一球，明：黑

$$P(\text{明退出}) = 0.5\cdot 0.4\cdot \frac{1}{3} + 0.5\cdot 0.4\cdot \frac{2}{3}\cdot 0.7\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 + 0.5\cdot 0.6\cdot \frac{2}{3} + 0.5\cdot 0.7\cdot \frac{2}{3}\cdot 0.4\cdot \frac{1}{2} + 0.5\cdot 0.7\cdot \frac{2}{3}\cdot 0.6 + 0.5\cdot 0.3\cdot \frac{1}{3}\cdot 1$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 3-2: 圖解繁複機率
  - 適用哪類問題？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



3-3: 數數算機率

第三週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

身為一個熱愛機率的青年，喜歡數數也是非常合理的！



- 古典機率常假設每個實驗結果(outcome) 發生機率相同
  - Ex: 包子攤肉包、菜包、豆沙包產量相同，外表一致。

$$\boldsymbol{P(\text{買到鹹包子}) = \frac{1}{3} \times 2}$$

- 故計算某事件機率之問題，等同於計算此事件包含多少實驗結果 (outcome)。故計算機率等價於數數問題！



數數基本原則 (Fundamental Principle of Counting)



- 若某種實驗有 n 種不同結果，而另一種實驗有 m 種不同結果。若操作此兩實驗將有 nm 種不同結果。
  - Ex: 下午茶有 **5** 種甜點的選擇， **10** 種飲料的選擇。共有多少種下午茶組合？

$$\mathbf{5 \times 10 = 50}$$
$$n \quad m \quad nm$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數數前的重要判斷



- 所有的物件是否可區分？(Distinguishable?)
- 實驗中抽選的物件是否放回供下次抽選？(With/Without Replacement?)
- 實驗中被抽選的東西，抽選順序是否有差異？(Order matters or not?)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

排列 (Permutation)



- Ex: 小美週末兩日慣購物。小美常自明華園三兄弟找人接送。若兩日司機不可重覆，問有多少種結果？
  - 可區分兮？ **Yes**
  - 有放回兮? **No**
  - 順序差異兮? **Yes**

六		日	
3	×	2	= 6



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

排列 (Permutation)



- 若有 n 異物，從中依序取出 k 物共有多少種結果？

第幾次取物：#1　#2　#3　…　#k

$$n \times n-1 \times n-2 \times \cdots \times n-(k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

重覆選取
(Choose with Replacements)



- Ex: 小美週末兩日慣購物。小美常自明華園三兄弟找人接送。無恥小美竟敢不排除連續凹人兩天，問有多少種結果？
  - 可區分兮？ Yes
  - 有放回兮? Yes
  - 順序差異兮? Yes

六		日	
3	×	3	＝9



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

重覆選取
(Choose with Replacements)



- 若有 n 異物，從中選取一物，每次取完放回。依序選取 k 次，共有多少種結果？

第幾次取物：#1 #2 #3 … #k

$$n \times n \times n \times \cdots \times n = n^k$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

組合 (Combination)



- Ex: 小美愛玩跳棋。小美常自明華園三兄弟找兩人下棋。問有多少種對戰組合？
  - 可區分兮？ **Yes**
  - 有放回兮? **No**
  - 順序差異兮? **No**

$$\frac{3 \times 2}{2!} = 3 = \binom{3}{2}$$

唸作：*3 choose 2*



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

組合 (Combination)



- 若有 n 異物，從中取出 k 物共有多少種結果？

第幾次取物：#1 #2 #3 … #k

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(k-1))/k!$$

$$= \frac{n \times n-1 \times n-2 \times \cdots \times (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

※ $\binom{n}{k}$: 二項式係數 (*binomial coefficients*)

來自二項式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

組合 (Combination)



- Ex: 某系隊共有12個籃球隊員。
  問有多少種先發組合？

共有 $\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!7!} = 792$ 種組合

※ 這...肯定是個爛隊...



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

多項組合 (Multinomial)



- Ex: 費雯兄慣於網路八卦版上發廢文。第一樓推文常有四類
  - 你媽知道你在發廢文嗎
  - 見此唉滴必噓
  - 在五樓…
  - 媽！我在這！
- 問：費雯兄發文 10 次，一樓推文共有多少種組合？

$$\underbrace{\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{4}}_{10}=4^{10}$$

- 問：有多少組合會看到 4 次「你…」，3 次「見…」，2 次「在五樓…」，1 次「媽…」？

見 你 五 你 媽 五 見 你 見 你



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

多項組合 (Multinomial)



- 若有 m 種異物，每次選物從中選一後放回，依序選 n 次。如此共有 m^n 種實驗結果。其中在這 m^n 種實驗結果中，第 1 種異物出現 n_1 次且第 2 種異物出現 n_2 次且… 且第 m 種異物出現 n_m 次，這樣的實驗結果共有多少種？

$$\#組合 = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n_m}{n_m}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\,(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{n_m!}{n_m!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!} \leftarrow multinomial\ coefficient$$

※ $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$

$$= \sum_{n_1=0}^{n}\sum_{n_2=0}^{n}\cdots\sum_{n_m=0}^{n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$$



數數如何應用在算機率上呢？



- 若一事件包含數個實驗結果(outcome)，且每個實驗結果發生的機率都一樣
  - 先計算任一個實驗結果 的機率
  - 再計算該事件共包含多少個實驗結果
  - 兩者相乘便得到該事件的機率！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

範例：費雯兄



- 繼前述費雯兄好發廢文之例。若根據統計，費雯兄一樓推文不同型態之出現機率為：
  - P(「你媽知道你在發廢文嗎」) = 0.4
  - P(「見此唉滴必噓」) = 0.2
  - P(「在五樓…」) = 0.1
  - P(「媽！我在這！」) = 0.3
- 問：若費雯兄發文 6 次，會在一樓推文看到 2 次「你…」，2 次「見…」，1 次「在五樓…」，1次「媽…」。這樣的機率為？

$$P(\text{你 你 見 見 五 媽}) = 0.4 \times 0.4 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.3$$

$$0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.3 = 0.000192$$

$$P(2\text{你}, 2\text{見}, 1\text{五}, 1\text{媽}) = \frac{6!}{2!2!1!1!} \cdot 0.000192 = 0.0346$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 3-3: 數數算機率
  - 古典機率的概念？
  - 為何數數可以算機率？
  - 如何區分不同型態的數數？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 4-1: 隨機變數
- 4-2: 累積分布函數 CDF
- 4-3: 機率質量函數 PMF
- 4-4: 離散機率分佈 I



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



4-1: 隨機變數 (RANDOM VARIABLE)

第四週

R.V.



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

考慮費雯兄的例子：



- 「繼前述費雯兄好發廢文之例。若根據統計，費雯兄一樓推文不同型態之出現機率為：
  - P(「你媽知道你在發廢文嗎」) = 0.4
  - P(「見此唉滴必噓」) = 0.2
  - P(「在五樓...」) = 0.1
  - P(「媽！我在這！」) = 0.3
- P(「媽！我在這！」) = 1 − P(「你媽知道你在發廢文嗎」) − P(「見此唉滴必噓」) − P(「在五樓...」) = 0.3
- 你，覺得有什麼問題呢？

光寫字就累翻了！哥用的可是繁體啊!!!



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

考慮費雯兄的例子：



- 若改為：「繼前述費雯兄好發廢文之例。根據費雯兄一樓推文，我們會定義 X 為不同值：
  - 「你媽知道你在發廢文嗎」：$X = 0$
  - 「見此唉滴必噓」：$X = 1$
  - 「在五樓...」：$X = 2$
  - 「媽！我在這！」：$X = 3$
- 根據統計：
  - $P(X=0)=0.4; P(X=1)=0.2; P(X=2)=0.1; P(X=3)=0.3$
- $P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$
- 跟前面比起來，你覺得如何呢？

這...這...真是太清爽、太給力了啊!!!



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數
(Random Variable, R.V.)



- 這是一個用來把實驗結果 (outcome) 數字化的表示方式
- 目的是可以讓機率的推導更數學、更簡明
- 前面例子中的 ***X*** 就是所謂的隨機變數
- 隨機變數通常都是用大寫的英文字母表示！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

探究它的本質！



- 隨機變數的本質是什麼？是~~變數~~嗎？**函數**
  - 「你媽知道你在發廢文嗎」：$X = 0$
    $\Rightarrow X($「你媽知道你在發廢文嗎」$) = 0$
  - 「見此唉滴必噓」：$X = 1$
    $\Rightarrow X($「見此唉滴必噓」$) = 1$
  - 「在五樓…」：$X = 2$
    $\Rightarrow X($「在五樓…」$) = 2$
  - 「媽！我在這！」：$X = 3$
    $\Rightarrow X($「媽！我在這！」$) = 3$

隨機變數 X 其實是一種函數，餵 X 吃一個 outcome ，就吐出一個對應的數字。數學上的表示法：

$$X: \underset{\sim}{S} \rightarrow \underset{\sim}{\mathcal{R}}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的種類



- 離散隨機變數 (Discrete R. V.)
  - Ex: 宅 vs. 店員： $\boldsymbol{X}$(微笑) $= \mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}$(不笑) $= \mathbf{1}$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}$
  - Ex: 小美選男友：： $\boldsymbol{X}$(明) $= \mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}$(華) $= \mathbf{1}$, $\boldsymbol{X}$(園) $= \mathbf{2}$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}, \boldsymbol{X} = \mathbf{2}$
  - Ex: 小明告白多少次才成功： $\boldsymbol{X}$($\mathbf{0}$次) $= \mathbf{0}$, $\boldsymbol{X}$($\mathbf{1}$次) $= \mathbf{1}$, $\boldsymbol{X}$($\mathbf{2}$次) $= \mathbf{2}, \ldots$
    $\Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}, \boldsymbol{X} = \mathbf{1}, \boldsymbol{X} = \mathbf{2}, \ldots$

離散 R.V. 的值是有限個，或是「可數的」無窮多個

- 連續隨機變數 (Continuous R. V.)
  - 幸運之輪： $\boldsymbol{X}$ 可以是 $\mathbf{0}$ 到 $\mathbf{1}$ 間內的任意數字

連續 R.V. 的值是有無窮多個，而且是「不可數」的無窮多個



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神馬叫可數？神馬叫不可數？



- 可數的：一個集合如果是「可數的」這代表它包含的東西是可以一個個被數的。不管用什麼方法數它裡面的東西，它裡面的任何一樣東西，總是會被數到的！

例：正偶數集合 $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ 是可數的
隨意取一個數字 89283070123740971123 7922
身為有恆心跟課的 MOOC 小子，總有一天會數到它的!!



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神馬叫可數？神馬叫不可數？



- 不可數的：一個集合若是「不可數的」這代表它包含的東西是無法可以一個個被數的。不管用什麼方法數它裡面的東西，它裡面一定有一樣東西是你沒數到的！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

神馬叫可數？神馬叫不可數？



重要性質：0 到 1 之間的所有數字的集合是不可數的！

小子：你這廢大叔，我超有恆心，絕對可以把這些數字一個個全部數出來。
丙紳：不可能的。假設你真有辦法數這集合中所有的數字。你就按照數的順序，把數字一個個寫下來！
小子：寫就寫！你這廢大叔！

0.25281 ...
0.38290 ...
0.12375 ...
⋮

丙紳撫鬚笑說：無知小子，你失算啦！有一個數字是你絕對沒數到的！
小子：我不信！
丙紳：小子，猖狂！我包你沒數到 0.716 ... (第 N 位數字定為 “9 – 第 N 個被數數字的第 N 位數字”)

小子虎軀一震！這才驚見自身之狂妄無知，才知眼前大叔威能。小子隨即跪下懇求丙紳收其為徒，泣言日後必當用心向學。丙紳撫鬚沉吟...你去 Coursera 註冊吧（後話不表）



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

在無窮多的世界很有趣啊！



- 「正整數的集合」跟「正偶整數」的集合相比，哪個集合裡面東西比較多？
- 「長度為一的線段上的點」跟「邊長為一的正方形上的點」，這兩個集合，哪一個點的數量比較多？

$A=\{1,2,3,\cdots\}$ $B=\{2,4,6,\cdots\}$

都一樣多！因為都可以找到一對一對應的方法。
要好好記住！這是跟正妹開啟聊天話題的一等素材啊！
是誰說學數學沒用的？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數？



- 阿宅若看到店員微笑，就會點 $200 的套餐。如果店員不笑，他就買 $15 的飲料。請問阿宅的消費金額 W 是隨機變數嗎？

店員表情可以由隨機變數 X 代表： $X(\text{微笑}) = 0, X(\text{不笑}) = 1$

W 是 X 的函數： $W(X(\text{微笑})) = 200, W(X(\text{不笑})) = 15$

所以 W 也是餵 outcome 吐數字！因此 W 也是一個隨機變數！

記住：隨機變數的函數，也是一個隨機變數喔！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 隨機變數的目的？
- 隨機變數的本質？
- 隨機變數的類型？
- 可數 vs. 不可數？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



4-2: 累積分佈函數 CDF (CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION)

第四週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

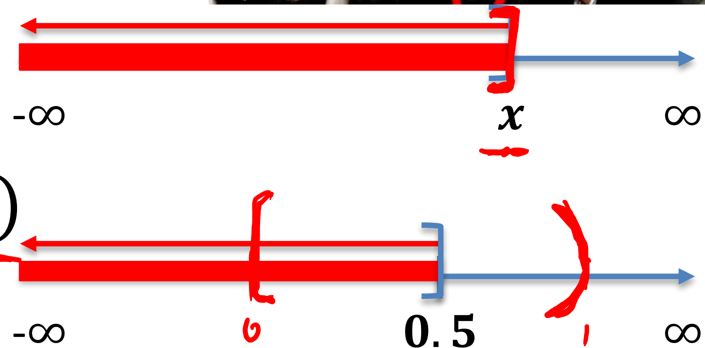
啥是累積分佈函數 CDF?



- 對任一個隨機變數 X，我們定義其 CDF 為函數：

$$F_X(x) \overset{\text{def}}{=} P(X \le x)$$

隨機變數



Ex: 幸運之輪

$$F_X(0.5) = P(X \le 0.5) = \frac{1}{2}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 有什麼用？



- 最有用的用途：
  計算 *X* 落在某範圍內的機率

$P(3 < X \leq 5)$

$P($ -∞ ... 3 ... 5 ... ∞ $)$

=

$P($ -∞ ... 5 ... ∞ $)$

−

$P($ -∞ ... 3 ... ∞ $)$

$$P(3 < X \leq 5)$$
$$= P(-\infty < X \leq 5)$$
$$- P(-\infty < X \leq 3)$$
$$= P(X \leq 5) - P(X \leq 3)$$
$$= \boxed{F_X(5) - F_X(3)}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 有什麼用？



- 最有用的用途：

  計算 X 落在某範圍內的機率

$P($ [number line from $-\infty$ to ∞, interval from a (open) to b (closed)] $)$

||

$P($ [number line from $-\infty$ to ∞, up to b (closed)] $)$

|

$P($ [number line from $-\infty$ to ∞, up to a (closed)] $)$

$P(a < X \leq b)$

$= F_X(b) - F_X(a)$

P(a<x<b)

P(a≤x<b)

$P(a \leq X \leq b)$

$= F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$

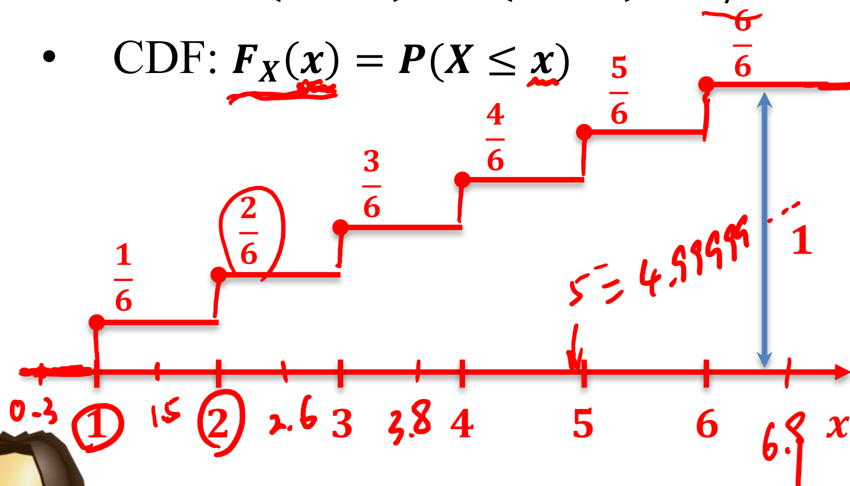


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散隨機變數的 CDF 長怎樣？



- Ex: X 為骰子的點數，故 $P(X=1)$
  $= P(X=2) = P(X=3) = P(X=4)$
  $= P(X=5) = P(X=6) = 1/6$
- CDF: $F_X(x) = P(X \leq x)$



$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

- $P(3 < X \leq 5)$

$= F_X(5) - F_X(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$

- $P(3 < X < 5)$

$= P(3 < X \leq 5^-)$

$= F_X(5^-) - F_X(3) = F_X(5) - P(X=5) - F_X(3) = \frac{1}{6}$

- $P(3 \leq X < 5) = ?$
- $P(3 \leq X \leq 5) = ?$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續隨機變數的 CDF 長怎樣？



- Ex: X 為幸運之輪所停下的數字，$X \in [0,1)$
  - CDF: $F_X(x) = P(X \leq x)$

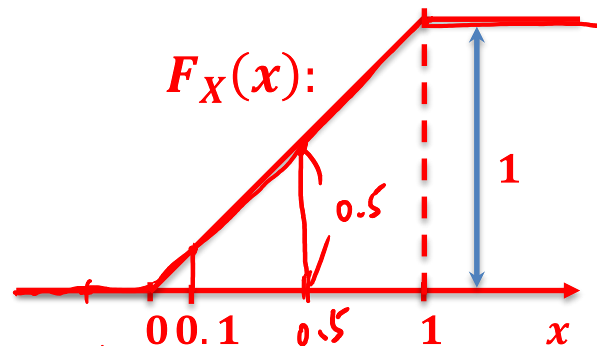
$F_X(-0.1) = P(X \leq -0.1) = 0$

$F_X(0.1) = P(0 \leq X \leq 0.1) = 0.1$

$F_X(0.5) = P(0 \leq X \leq 0.5) = 0.5$

$F_X(1) = P(0 \leq X \leq 1) = 1$

$F_X(1.7) = P(0 \leq X \leq 1.7) = 1$



- $P(0.3 < X \leq 0.5)$
  $= F_X(0.5) - F_X(0.3) = 0.5 - 0.3 = 0.2$
- $P(0.3 < X < 0.5) = P(0.3 < X \leq 0.5^-)$
  $= F_X(0.5^-) - F_X(0.3) = 0.5 - 0.3 = 0.2$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

CDF 的性質



- 離散隨機變數之 CDF：

$$F_X(x^+) = F_X(x)$$

$$F_X(x^-) = F_X(x) - P(X = x)$$

- 連續隨機變數之 CDF：

$$F_X(x^-) = F_X(x) = F_X(x^+)$$

- 共同性質
  - $F_X(-\infty) = P(X \le -\infty) = 0$
  - $F_X(\infty) = P(X \le \infty) = 1$
  - $0 \le F_X(x) \le 1$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- CDF 的定義?
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- CDF 的用途?
  - $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
- CDF 的性質?



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



4-3: 機率質量函數 PMF (PROBABILITY MASS FUNCTION)

第四週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

啥是機率質量函數 PMF？



- 對任一個整數值的**離散隨機變數** X，我們定義其 PMF 為函數：

$$p_X(x) \overset{\text{def}}{=} P(X = x)$$

Ex: X 為公平骰子之點數

$$p_X(3) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PMF 跟 CDF 的關係？



$$F_X(2.5) = P(X \leq 2.5)$$

$$= P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) + P(X = -1) + \cdots$$

最接近 2.5 且不大於 2.5 的整數

$$= \sum_{n=-\infty}^{2=\lfloor 2.5 \rfloor} P(x = n)$$

對任何 x：

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

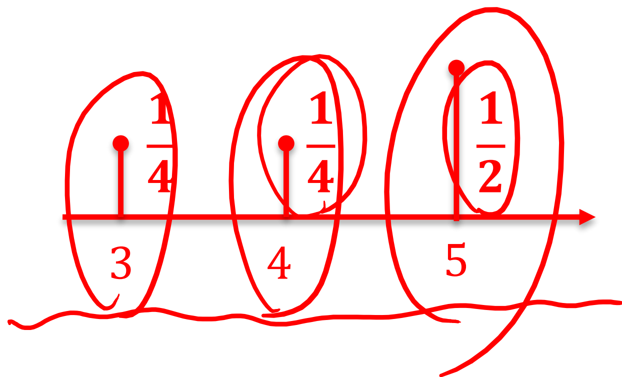


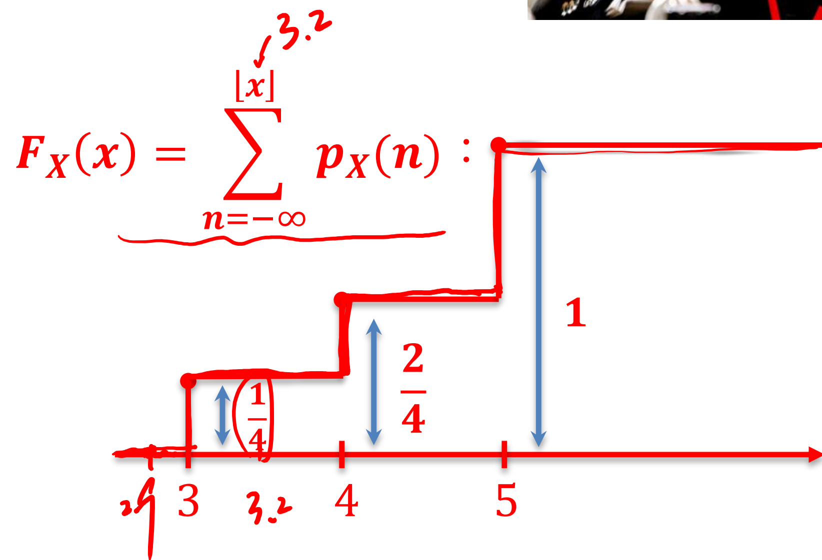
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PMF 跟 CDF 的關係？



- Ex: PMF ➔ CDF





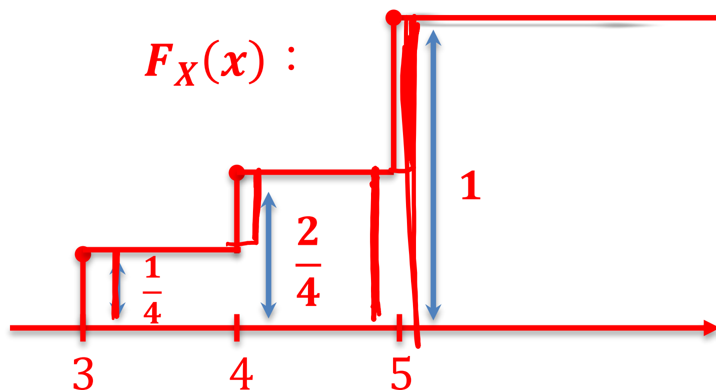


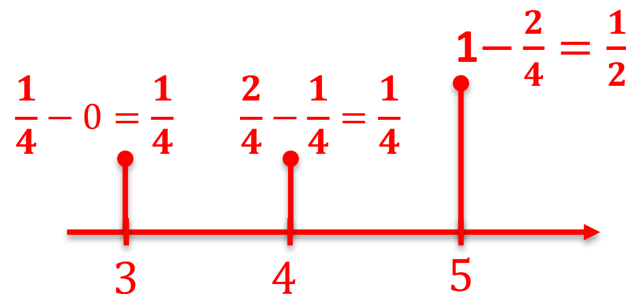
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PMF 跟 CDF 的關係？



- Ex: CDF ➔ PMF





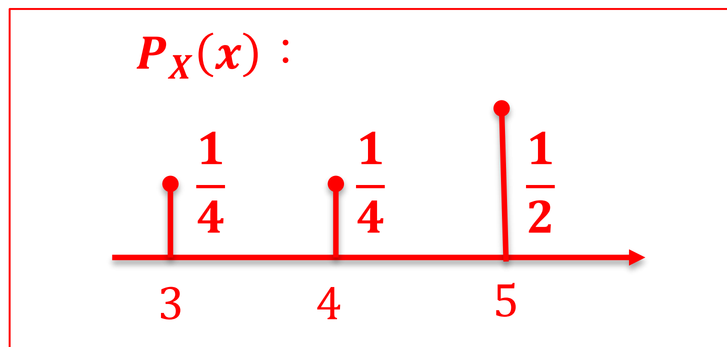


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

機率分佈 (Probability Distribution)



- 任何一個 PMF（或是之後介紹的 PDF）都稱作是一種機率分佈（將總和為 1 的機率分佈在點上之故）





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- PMF的定義？
- PMF 跟 CDF 的關係？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



4-4: 離散機率分佈 I (DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第四週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下…



- 丟擲銅板：非正面，即反面，正面機率為 0.5
- 阿宅告白：非成功，即失敗，成功機率為 0.7
- 出門天氣：非晴天，即雨天，晴天機率為 0.6

1 次實驗，2 種結果。
在意某結果發生否 → Bernoulli 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

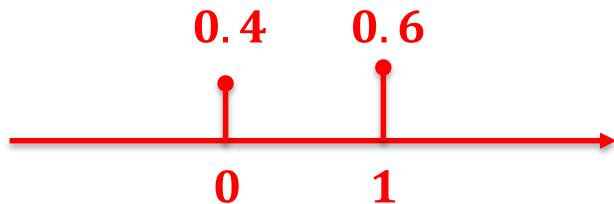
Bernoulli 機率分佈



- PMF: 若實驗成功機率為 0.6 作 1 次實驗，X 表成功次數

$X \sim Bernoulli(0.6)$

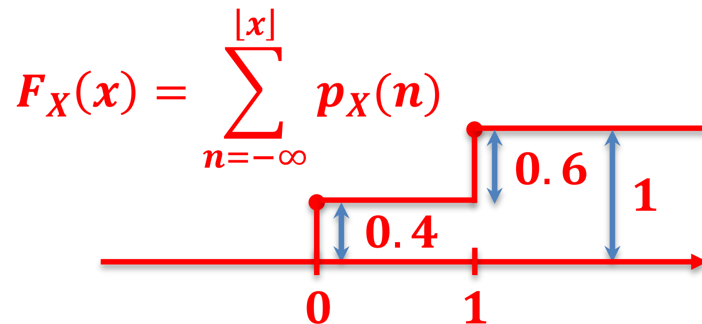
$P_X(x)$ ：



$$p_X(x) = \begin{cases} 0.6 & , x = 1, \\ 0.4 & , x = 0, \\ 0 & , otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ 0.4 & , 0 \le x < 1, \\ 1 & , x \ge 1. \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Bernoulli 機率分佈

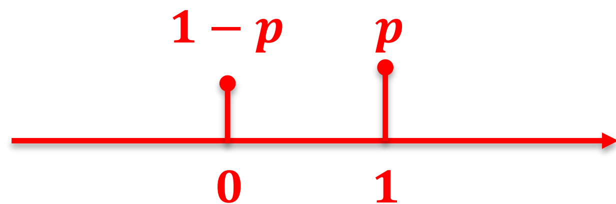


- PMF: 若實驗成功機率為 p

作 1 次實驗， X 表成功次數

$X \sim Bernoulli(p)$

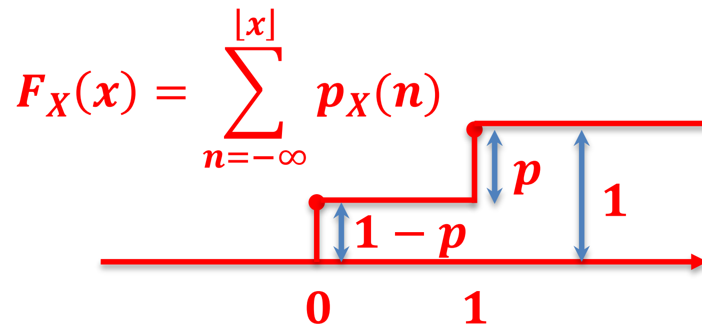
$P_X(x)$:



$$p_X(x) = \begin{cases} p & , x = 1, \\ 1-p & , x = 0, \\ 0 & , otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ 1-p & , 0 \le x < 1, \\ 1 & , x \ge 1. \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下...



- 阿宅鼓起勇氣搭訕 10 人，若每次搭訕成功機率為 0.6，10 次成功 8 次的機率為？
- 一週 5 天午餐在曉福買魔石漢堡，若每次製作超時機率為 0.9 5 天中有 3 天製作超時的機率為？
- 一週有 3 系夜，在活大亂停車 3 次，若每次遭阿伯拖之機率為 0.8，那這 3 次被拖 2 次之機率為？

作 n 次實驗，1 個機率，在意 n 次實驗出現某結果 k 次之機率→ Binomial 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Binomial 機率分佈



- PMF: 若實驗成功機率為 **0.6** 作 **10** 次實驗，X 表成功次數

$X \sim BIN(10, 0.6)$

$p_X(8)$

$= P(X=8)$

#成功 = 8
#失敗 = 10 − 8

$= \binom{10}{8} 0.6^8 (1-0.6)^{10-8}$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} \binom{10}{m} \cdot 0.6^m \cdot (1-0.6)^{10-m}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Binomial 機率分佈



- PMF: 若實驗成功機率為 p 作 n 次實驗， X 表成功次數

$X \sim BIN(n,p)$

$p_X(x)$

$= P(X=x)$

#成功 $= x$
#失敗 $= n - x$

$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下...



- 丟公平骰：1 到 6 各點數出現機會均等
- 混哥考試：作答 A, B, C, D 機會均等
- 狡兔三窟：出現在窟 1、窟 2、窟 3 機會均等

1 次實驗，n 種結果，各結果機率均等。
在意某結果發生否 → Uniform 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

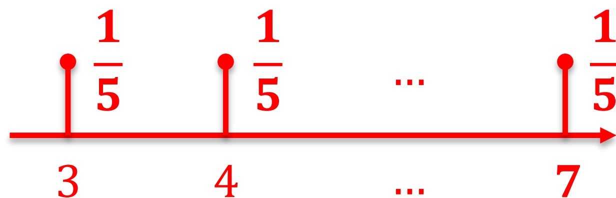
Uniform 機率分佈



- PMF: 如果 X 等於 $3, 4, \ldots, 7$ 的機率均等

$P_X(x)$：

$X \sim UNIF(3, 7)$



$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7-3+1} = \dfrac{1}{5}, & x = 3, 4, \ldots, 7, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < 3, \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor - 3 + 1}{5} & , 3 \le x \le 7, \\ 1 & , x > 7. \end{cases}$$



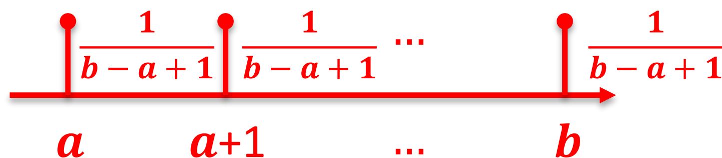
Uniform 機率分佈



- PMF: 如果 X 等於 $a, a+1 \dots, b$ 的機率均等

$P_X(x)$：

$X \sim UNIF(a, b)$



$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & x = a, a+1, \dots, b, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < a, \\ \frac{\lfloor x \rfloor - a + 1}{b - a + 1} & , a \leq x < b, \\ 1 & , x \geq b. \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

學機率分佈有何用？



- 很多事物背後機率模型是未知的
- 對事物的運作方式、本質清楚後，若跟某機率分佈的本質相同或是接近，我們便可採用該機率分佈來近似、模擬該事物的運作
- 在這近似、模擬的機率模型上，便可以開始估算各式各樣事件的機率



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 機率分佈？
- Bernoulli 機率分佈？
- Binomial 機率分佈？
- Uniform 機率分佈？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 5-1: 離散機率分佈 II
- 5-2: 機率密度函數 PDF
- 5-3: 連續機率分佈 I



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



5-1: 離散機率分佈 II

(DISCRETE PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第五週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下...



- 阿宅告白：成功機率為 0.3，不成功誓不休。問到第 5 次才告白成功之機率？
- 孫文革命：成功機率為 0.1，不成功誓不休。問到第 11 次才成功之機率？
- 六脈神劍：那糾纏狂媽寶廢物段譽每次要打出六脈神劍，打的出來的機率為 0. 1。他在 10 次才打出六脈神劍的機率？

實驗中出現某結果機率已知，重覆操作實驗至該結果出現為止。
在意某結果是在第幾次實驗才首次出現→ Geometric 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 機率分佈



- 六脈神劍：那媽寶廢物段譽每次要打六脈神劍，打的出來的機率為 0.1。他在第 10 次才打出六脈神劍的機率？

敗 敗 敗 敗 敗 敗 敗 敗 敗 成

$$\Rightarrow \text{機率} = 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.9 \times 0.1$$
$$= 0.9^9 \times 0.1$$

※ 不是老師愛吐槽，我覺得機率應該是... 0



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 機率分佈



- 六脈神劍：那媽寶廢物段譽每次要打六脈神劍，打的出來的機率為 p。他在第 X 次嘗試才成功打出六脈神劍。$X = x$ 的機率？

敗 敗 敗 敗 敗 敗 敗 ... 敗 成

$x - 1$

$\Rightarrow$ 機率 $= (1-p)^{x-1} \times p$

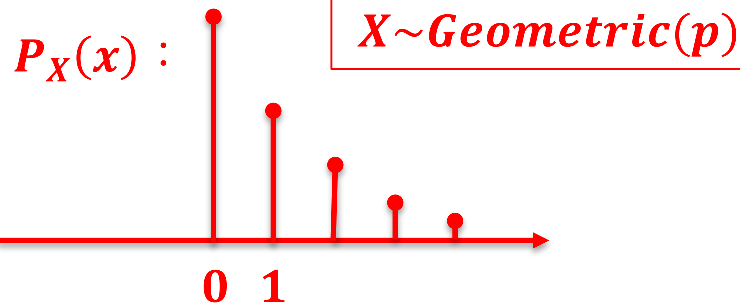


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Geometric 機率分佈 有失憶性！



- PMF: 若實驗成功機率為 p，嘗試到成功為止，作了 X 次嘗試



$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p & , x = 1,2,3,\ldots \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

- CDF:

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(n)$$

$$= \begin{cases} x \geq 1: \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^{n-1} p = p \cdot \frac{1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}}{1-(1-p)} \\ x < 1: \ 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor} & , x \geq 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下…



- 自尊阿宅：阿宅邀約店員失敗機率為 0.9，若邀約失敗達 4 次，阿宅便會自尊有損而放棄追求。問在阿宅第 7 次邀約時決定放棄追求之機率？
- 六脈神劍：媽寶廢物段譽每次打成功 5 次六脈神劍便功力耗盡。若每次打的出來的機率為 0. 1。請問他在第 9 次時剛好功力耗盡的機率？

實驗中出現某結果機率已知，重覆操作實驗至該結果出現第 k 次為止。在意到底在第幾次實驗才結束→ Pascal 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Pascal 機率分佈



- 六脈神劍：那媽寶廢物段譽每次要打六脈神劍，打的出來的機率為 0.1。成功 5 次便功力耗盡。請問他在第 9 次時剛好功力耗盡的機率？

可能情況之一：敗 成 敗 成 敗 成 成 敗 成

⇒ 此情況機率 $= 0.9 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.9 \times 0.1$
$= 0.9^4 \times 0.1^5$

剛好第 9 次才成功第 5 次的情況有幾種？$\binom{8}{4}\binom{1}{1} = \binom{8}{4}$

⇒ 所求機率 $= \binom{8}{4} \times 0.9^4 \times 0.1^5$



Pascal 機率分佈



- 六脈神劍：那媽寶廢物段譽每次要打六脈神劍，打的出來的機率為 p。成功 k 次便功力耗盡。他在第 X 次嘗試才成功打出 k 次六脈神劍。$X=x$ 的機率？

可能情況之一：敗 成 敗 成 敗 成 成 敗 ... 成

$x-1$

$\Rightarrow$ 此情況機率 $=(1-p)^{x-k}\times p^k$

剛好第 x 次才成功第 k 次的情況有幾種？$\binom{x-1}{k-1}\binom{1}{1}=\binom{x-1}{k-1}$

$\Rightarrow$ 所求機率 $=\binom{x-1}{k-1}\times(1-p)^{x-k}\times p^k$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Pascal 機率分佈



- PMF: 若實驗成功機率為 p，試到第 k 次成功為止共作了 X 次

$X \sim Pascal(k,p)$

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k & , x = k, k+1, \ldots \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

- CDF:

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P($第 k 次成功在第 x 次以前發生$)$

$= P($在 x 次實驗中 $\geq k$ 次成功$)$

$= P(Y \geq k), Y \sim BIN(x,p)$

※故 *Pascal* 又稱作 *Negative Binomial*



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

觀察一下…



- 轉角夜宵：在晚上 平均每小時會有 10 人 來跟轉角哥買夜宵。問擺攤 5 小時 有 60 人光顧之機率？
- 費雯被噓：費雯兄 po 文後， 平均每分鐘會有 5 人噓之 。問發文後 二十分鐘 變成 XX (100 噓) 之機率？

某結果出現之平均速率（rate: 次數/時間）已知。問持續觀察某時間長度後，看到該結果出現 k 次之機率？→ Poisson 機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 機率分佈



- PMF: 已知某事發生速率為每單位時間 λ 次，觀察時間為 T 時間單位。 X 為該觀察時間內發生該事的總次數。則：

$$X \sim POI(\lambda T)$$

$$p_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{(\lambda T)^x}{x!}$$

※ $\boxed{\mu = \lambda T}$, $X \sim POI(\mu) \Rightarrow P_X(x) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^x}{x!}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 機率分佈



- CDF:

$X \sim POI(\lambda T)$

$$F_X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_X(x) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^n}{n!}, & x = 0, 1, 2 \dots \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 機率分佈



- 費雯被噓：費雯兄 po 文後，平均每分鐘會有 5 人噓之。問發文後 20 分鐘變成 XX (100 噓) 之機率？

$\lambda = 5$ 噓/分，若定義隨機變數 X 為 20 分鐘內的噓數

$\Rightarrow X \sim POI(\lambda T) = POI(100)$

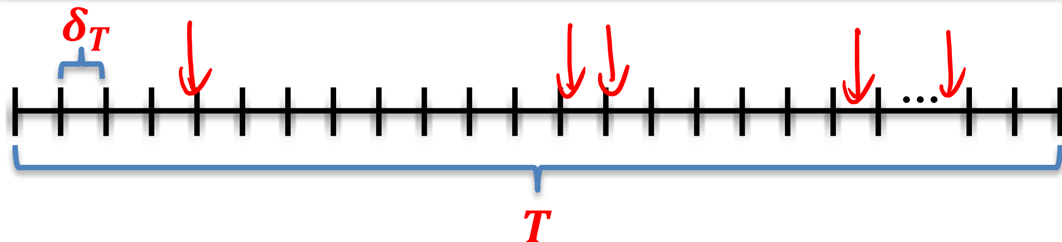
$$\Rightarrow p_X(100) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{\lambda T^{100}}{100!} = e^{-100} \cdot \frac{100^{100}}{100!}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Poisson 是怎麼來的？





將 T 切成長度為 δT 的極小段

$\delta T \to 0 \Rightarrow$ 共有 $n = \frac{T}{\delta_T} \to \infty$ 個小段。若發生速率為 λ 次/分，每個小段會發生的機率 $p = \lambda\delta_T = \frac{\lambda T}{n}$.

故 T 時間內發生的次數 $X \sim BIN(n,p) = BIN\left(n, \frac{\lambda T}{n}\right)$ ·

$$\lim_{\delta_T \to 0} p_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\left(\frac{\lambda T}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\frac{(\lambda T)^x}{n^x}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n}(\lambda T)^x\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^{-x} = \frac{(\lambda T)^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda T}{n}\right)^n = \frac{(\lambda T)^x}{x!}e^{-\lambda T}$$

$$\Rightarrow X \sim POI(\lambda T)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

你也懂 Poisson？略懂、略懂



- 草船借箭：曹軍落箭平均密度為每尺見方三矢。諸葛孔明於船上置放草人六百。各草人正面面積為六尺見方。周瑜問諸葛孔明可借得萬箭機率為何？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- Geometric 機率分佈？
- Pascal 機率分佈？
- Poisson 機率分佈？
  - 跟 Binomial 的關係？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



5-2: 機率密度函數 PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)

第五週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

人家有，我也想要有...



- 離散的隨機變數有 PMF 告訴我們某個數字發生的機率
- 連續變數的機率分佈常有不均等的情況發生，Ex: 睡覺的時間長度
- 對連續的隨機變數，我們也想知道某個數字發生的機會多大，可以用 PMF 嗎?



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續R.V. 的先天問題



- 以幸運之輪為例 $X \sim [0, 1)$,

$$p_X(0.7) = ?$$

$[0, 1)$ 中每個數字發生機率均等，令其為 p
$[0, 1)$ 中有沒有超過 10^6 個數字？ 有！$\Rightarrow 10^6 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-6}$
$[0, 1)$ 中有沒有超過 10^8 個數字？ 有！$\Rightarrow 10^8 \times p \leq 1 \Rightarrow p \leq 10^{-8}$
…
所以 $p_X(0.7) = p = 0$?!!!!!



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

悲哀啊...



- 連續隨機變數跟 PMF 注定就是沒辦法在一起，悲哀啊！
- 關鍵於每個數字發生的機率都是 0！
- 還是很想知道在某個數字發生的機會多大，怎麼辦?



先看個亂七八糟的例子



- 因為拍戲，特別訂做合金寶劍
- 銅、金打造，如何得知有無偷工減料?
- 整根有質量，但是每點質量都是零？好熟悉！
- 不看質量看什麼？看密度！



$$密度\ at\ x \approx \frac{質量\ in\ [x,x+\Delta x]}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續的東西，關鍵是密度！



- 寶劍有密度，機率也可有密度！
- 對隨機變數 X 而言，其機率密度：

$$PDF: f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$$

$$= F'_X(x)$$

$$CDF\ F_X(x) \underset{\int_{-\infty}^{x}}{\overset{\frac{d}{dx}}{\rightleftarrows}} PDF\ f_X(x)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 跟機率的關係

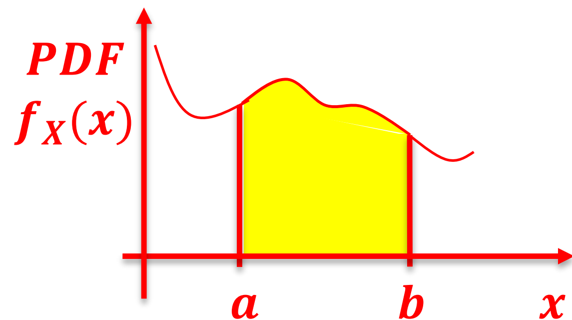


- 因為我們習慣處理機率，看到 PDF 如何把它跟機率連結呢?

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$$

$$= \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$





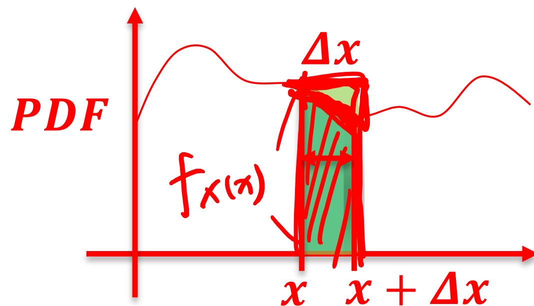
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 跟機率的關係



- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x}$
- 當 Δx 很小時：

$$P(x \le X \le x + \Delta x) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

PDF 有哪些性質呢?



- $f_X(x) = F'_X(x)$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
- $f_X(x) \geq 0$

$f_X(x)$ can be larger than 1



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 連續隨機變數每點發生機率是？
- 什麼是機率密度函數 PDF？
- PDF 跟 CDF 的關係？
- PDF 的性質？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



5- 3：連續機率分佈 I (CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

第五週



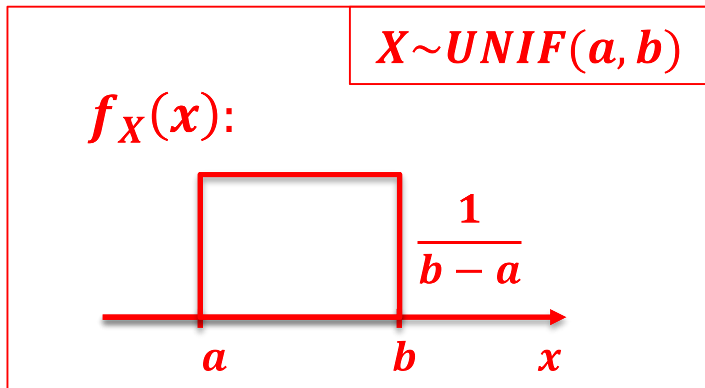
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 機率分佈



- PDF:

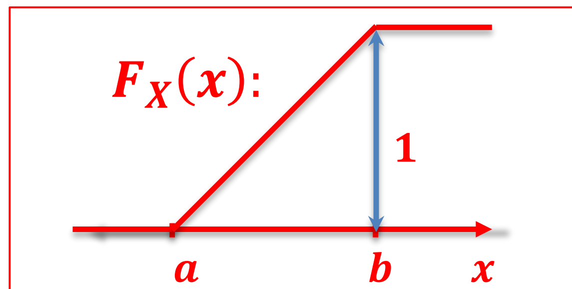
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



- CDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

$$= \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

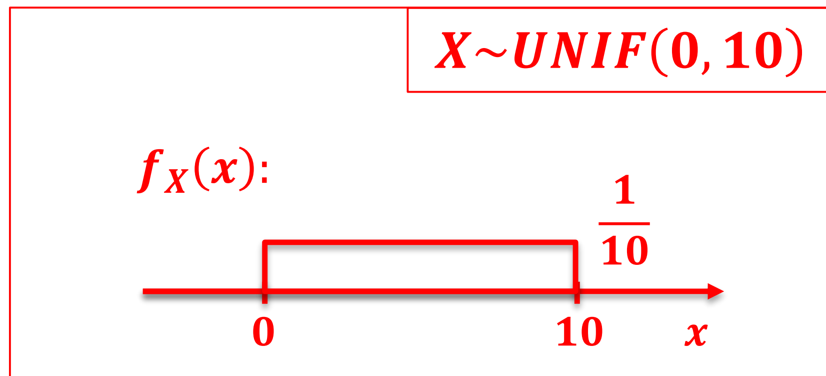


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Uniform 機率分佈



- Ex: 已知1路公車每十分鐘一班。小美隨意出發到公車站，小美須等候公車之時間為 X





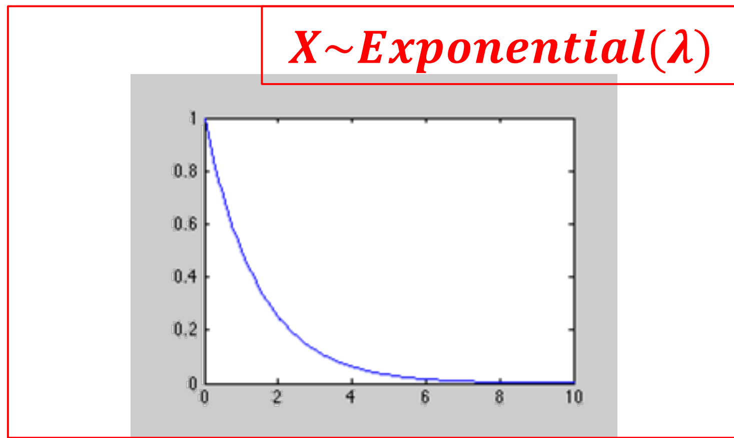
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Exponential 機率分佈



- PDF:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, \text{otherwise.} \end{cases}$$



- CDF:
  - If $x \geq 0$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du$$
$$= -\int_0^x e^{-\lambda u} d(-\lambda u)$$
$$= -[e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

  - If $x < 0$: $F_X(x) = 0$.



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Exponential 機率分佈



- Exponential 分佈有失憶的性質 (memoryless)，常被用來 model 有這種性質的事情
  - Ex: 小美出門化妝所需之時間
  - Ex: 某宅打LOL所花的時間



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈



- $X \sim Erlang(n, \lambda)$

Gamma Distribution

$$\text{PDF: } f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}, x \geq 0; \\ 0, \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

※ $f_X(x) = \underbrace{(\lambda e^{-\lambda x}) * (\lambda e^{-\lambda x}) * \cdots * (\lambda e^{-\lambda x})}_{n \text{ 次 convolution}}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈



- CDF: $\boldsymbol{F_X(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} & , x \geq 0; \\ \mathbf{0} & \text{, otherwise.} \end{cases}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Erlang 機率分佈



- $Erlang(n,\lambda)$ 常被用來 model 一件有多個關卡事情的總時間，而每個關卡所需時間都是隨機的
  - 關卡數：n
  - 每關卡所需時間之機率分佈 $Exponential(\lambda)$
  - Ex: 打電動過三關所需時間 $Erlang(3,\lambda)$
  - Ex: 寫完五科作業所需時間 $Erlang(5,\lambda)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- Uniform 機率分佈？
- Exponential 機率分佈？
  - 有失憶性（以後會證明）
- Erlang 機率分佈？
  - 跟 Exponential 的關係？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

丙紳機率第五週

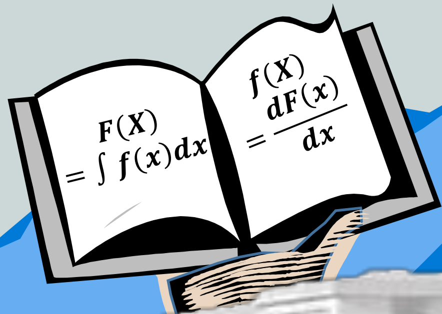
人們再度想起了

被微積分支配的恐懼

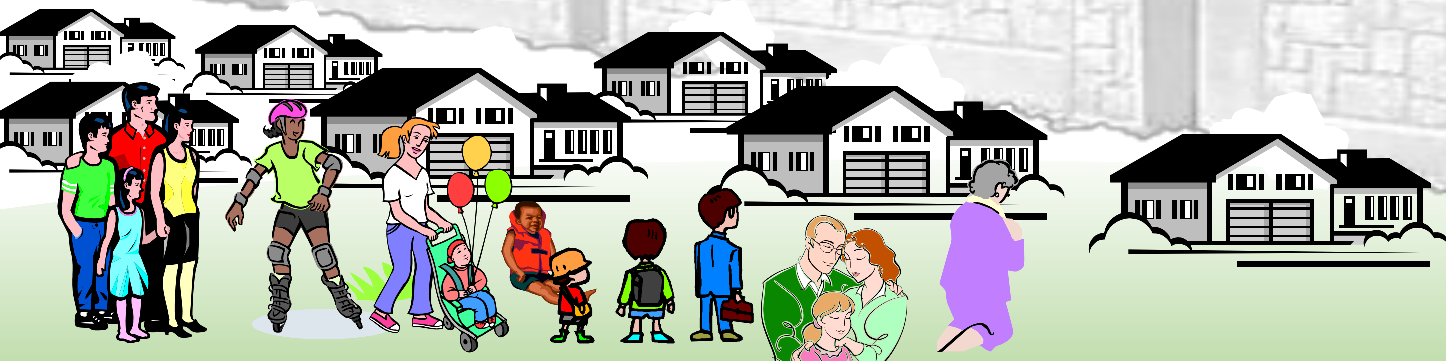
與積分鬼打牆

積不出來時

的無比屈辱～～～







本週主題概述



- 6-1: 連續機率分佈 II
- 6-2: 期望值 I



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



6-1: 連續機率分佈 II
(CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

第六週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Normal 機率分佈（常態分佈）



- 常態分佈在自然界很常出現
  - Ex: 人口身高分佈、體重分佈
- 亦常被用作「很多隨機量的總合」的機率模型
  - Ex: 100 人吃飯時間的總合
  - 原因：來自最後會講到的「中央極限定理」



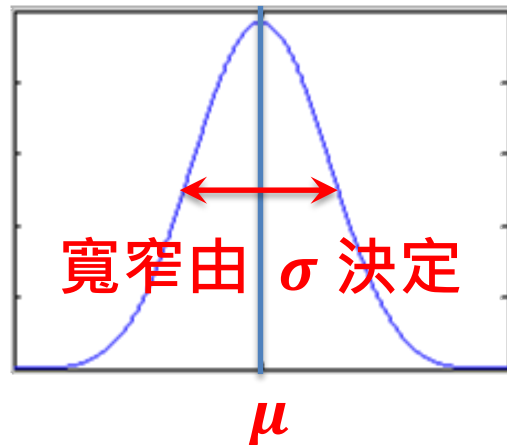
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Normal 機率分佈（常態分佈）



- 常態分佈，亦常被稱作 Gaussian (高斯) 機率分佈 (瞧那高斯的威能啊！！)
- $X \sim Gaussian(\mu, \sigma)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



- 也常有人用 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 來表示



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Normal 機率分佈（常態分佈）



- CDF 是多少？
  - 很難算，積分根本算不出來！
  - 用數值積分法去建表？很難啊，因為不同的 μ, σ 就會造就出不同的 常態分佈 PDF，每個都要建一個表會要命啊！
- 怎麼辦？
  - 有沒有辦法找到一組特別 μ, σ ，先針對這組的 CDF 建表，然後想辦法把別的常態分佈的 CDF 跟這組 CDF 牽上關係？
  - 若能牽扯上，再利用這表去算出別的常態分佈的 CDF 值？



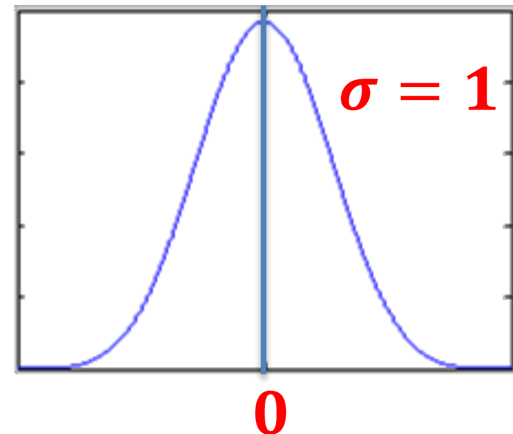
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Standard Normal Distribution
標準常態分佈



- $Z \sim N(0,1)$,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$





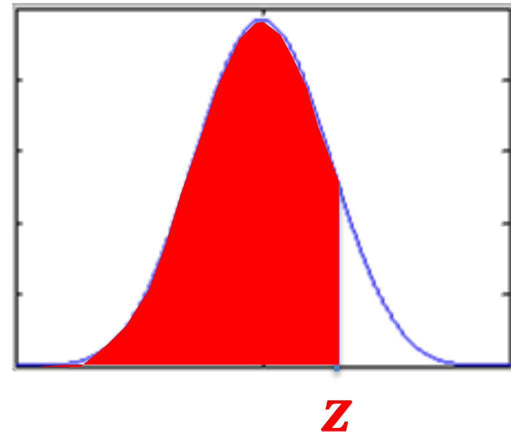
Standard Normal Distribution
標準常態分佈



- $Z \sim N(0,1)$,

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

- CDF 表示為 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
  - 積不出來，只能以數值方法近似出來後建表給人家查
  - 網路上或是工程計算機上常能找到





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

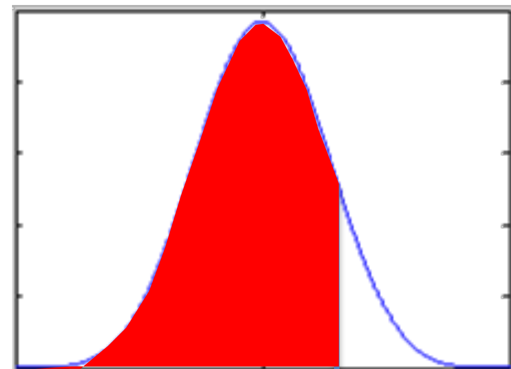
Standard Normal Distribution
標準常態分佈



- 例：$F_Z(1.325)$ =?

http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_normal_table

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990



1.325

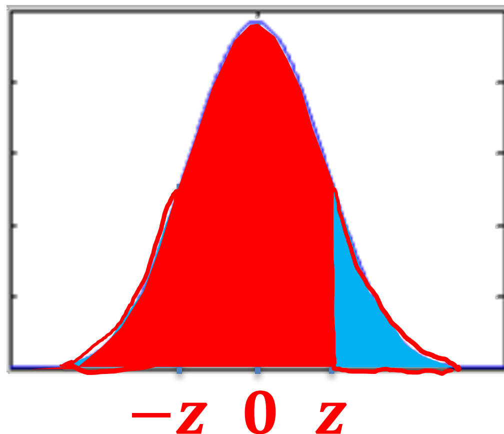
$$F_Z(1.325) = \frac{0.9066 + 0.9082}{2} = 0.9074$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Standard Normal Distribution 標準常態分佈

- $\boldsymbol{\Phi}(z)$ 的性質： $\boldsymbol{\Phi}(-z) = 1 - \boldsymbol{\Phi}(z)$



$\Phi(-z) + \Phi(z) = 1$

$\Phi(-z)$ ↓ blue

$\Phi(z)$ ↓ red





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

任意 μ, σ 下的 CDF？

- 任意 μ, σ 下的CDF，我們要把它跟 $N(0,1)$ 牽上關係
- 「關係！」：對任何 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 而言，$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

證明：
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = P(X \le \mu + \sigma z) = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $\omega = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} d\omega = \Phi(z)$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

任意 μ, σ 下的 CDF？



- 對任何 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 而言，$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

證明：

$$F_X(x) = P(X \le x)$$
$$= P(X - \mu \le x - \mu)$$
$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$\sim N(0,1)$

$\sigma > 0$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

任意 μ, σ 下的 CDF？



- Ex: 已知 10 名水源阿伯每日拖車總重量總和 $X \sim N(500, 100^2)$ (公斤)，問本日總重量少於 700 之機率為？

$$F_X(700) = P(X \le 700)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{700-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{700-500}{100} = \frac{200}{100} = 2\right)$$

$$= \Phi(2) = 0.977$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 常態分佈為何重要？
- 常態分佈的 CDF 有精確的函數形式嗎？
- 每個不同的常態分佈都有不同的 CDF 怎麼辦？
- 為什麼要特別提標準常態分佈？
- 任何常態分佈的隨機變數都可以跟標準常態分佈牽上關係？這樣有什麼意義？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



6-2: 期望值 I (EXPECTATION)

第六週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

先說一下大數法則



- 丟一個銅板得正面機率是多少？
- 丟 3 次，記錄實驗中得正面的次數比例為 2/3
- 丟 10 次，得正面的次數比例為 6/10
- 丟 100 次，得正面的次數比例為 53/100
- 丟 10000 次，得正面的次數比例為 5012/10000
- 大數法則：想知道某事件發生的機率？
  作很多次實驗，記錄實驗中出現那個事件多少次。當實驗次數接近無窮多次時，這個比例就會越來越接近實際的機率！

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)



- 做隨機實驗時，我們很希望能有某種估算
- 平均值是我們平常最常普遍的估算值
- 作兩次實驗的平均值是？$\frac{X_1+X_2}{2}=?$
- 作十次實驗的平均值是？$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{10}}{10}=?$
- 不管我們做多少次實驗，平均值都是一個隨機變數，那不就不能拿來估算？
- 所幸！當做的實驗次數趨近於無窮多時，這麼多次的實驗的平均值會收斂到一個常數！我們就用它來當作這機率分佈的估算值吧！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)



- 若考慮某機率分佈，作實驗很多次若隨機實驗之樣本空間為 $\{1,2,\ldots,n\}$。作實驗 N 次，記錄各結果出現次數，分別為 $N_1,N_2,\ldots,N_n$
- 平均值 (Mean)：
  - Ex: $3,7,3,5,\ldots,6 \Rightarrow mean = \frac{3+7+3+5+\cdots+6}{N} = \sum_{x=1}^{n} \frac{x \cdot N_x}{N}$
- 根據大數法則：
  - $\lim_{N\to\infty} \frac{N_x}{N} = P_X(x) \Rightarrow \lim_{N\to\infty} mean = \lim_{N\to\infty} \sum_{x=1}^{n} x \frac{N_x}{N} = \sum_{x=1}^{n} x \cdot P_X(x)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)



- Mean 值又稱作期望值　　$\mu_Y = E[Y]$
- 對離散隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 而言，我們定義其期望值

$$E[X] = \mu_X = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot P_X(x)$$

→ 常數

- 期望值雖是很常用來估算隨機變數的常數值，但小心不要被誤導。 期望值不等於隨機會發生的值

Ex: $P_X(1) = P_X(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu_X = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數之期望值



- 對於任一離散隨機變數 X 而言，其任意函數 $g(X)$ 亦是一隨機變數，亦有期望值
- $g(X)$ 期望值定義為

$$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot P_X(x)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質



- Ex: $E[3X^2] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} 3x^2 \cdot P_X(x)$

$= 3 \cdot \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P_X(x) = 3 \cdot E[X^2]$

- $E[\alpha\, g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \alpha\, g(x) \cdot P_X(x)$

$= \alpha \cdot \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot P_X(x) = \alpha \cdot E[g(X)]$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質



- $E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} [\alpha\, g(x) + \beta\, h(x)] \cdot P_X(x)$$

$$= \alpha \cdot \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot P_X(x) + \beta \cdot \sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x) \cdot P_X(x)$$

$$= \alpha \cdot E[g(X)] + \beta \cdot E[h(X)]$$

- Ex: $E[6X + 8X^2] = 6\,E[X] + 8\,E[X^2]$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質



- $E[\alpha]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \alpha \cdot P_X(x) = \alpha \cdot \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_X(x) = \alpha$$

Ex: $E[6] = 6$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見的隨機變數函數期望值



- X的 n^{th} moment：　　E[Y^n]

$$E[X^n] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n \cdot P_X(x)$$

  – Ex: $E[X^2]$ 是 X 的 2nd *moment*

  – Ex: $E[X^5]$ 是 X 的 5th*moment*

- X的變異數 (variance)：

$$E[(X-\mu_X)^2] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot P_X(x)$$

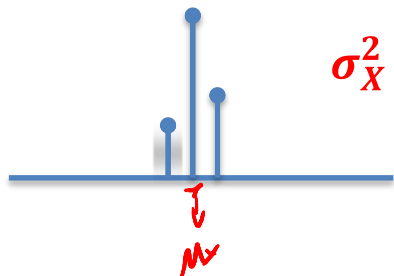


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

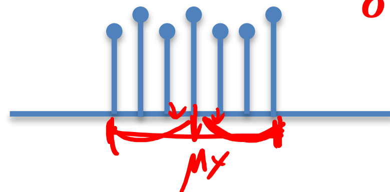
變異數 (Variance)



- Variance 通常符號表示為 $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$
- 變異數隱含關於隨機變數 X 多「亂」的資訊



σ_X^2 小 ($\because x \approx \mu_X$)



σ_X^2 大 ($\because X$ 不見得接近 μ_X)

- 變異數的開根號便是標準差 (standard deviation)： σ_X

$\sigma_X = \sqrt{Variance}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法



- $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$ $= \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 \, p_X(x)$

$$= E[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2]$$

$$= E[X^2] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E[X^2] - 2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

$$-2\mu_X^2 + \mu_X^2 = -\mu_X^2$$

$$\Rightarrow E[X^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散分佈之期望值/變異數



- $X \sim Bernouli(p)$：
  - $\mu_X = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = \sum_{x=0}^{1} x^2 \cdot p_X(x) - \mu_X^2$
    $= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p)$
- $X \sim BIN(n, p)$：
  - $\mu_X = np$
  - $\sigma_X^2 = np(1-p)$

Ex: $X \sim BIN(5, 0.2)$

$\Rightarrow \mu_X = 5 \cdot 0.2 = 1$

$\sigma_X^2 = 5 \cdot 0.2\,(1 - 0.2) = 0.8$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散分佈之期望值/變異數



- $X \sim GEO(p)$：
  - $\mu_X = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p = \frac{1}{p}$
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$
- $X \sim PASKAL(k, p)$：
  - $\mu_X = \frac{k}{p}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{k(1-p)}{p^2}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散分佈之期望值/變異數



- $X \sim POI(\alpha)$：
  - $\mu_X = \alpha$
  - $\sigma_X^2 = \alpha$
- $X \sim UNIF(a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

機率推導的奧義：「湊」字訣



- 以 $X \sim POI(\alpha)$ 為例：
- $P_X(x) = \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha}, x = 0, 1, 2, \dots, \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} = 1$
- $E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\alpha^x}{(x-1)!} e^{-\alpha} = \alpha \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\alpha^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\alpha}$

令 $x' = x - 1$

$$= \alpha \cdot \sum_{x'=x-1=1-1}^{\infty-1} \frac{\alpha^{x'}}{x'!} e^{-\alpha} = \alpha \cdot \sum_{x'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{x'}}{x'!} e^{-\alpha} = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - \alpha^2, \quad E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha^x}{x!} e^{-\alpha} = ?$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 為何想知道期望值？
- 根據大數法則，期望值等於？
- 隨機變數的函數期望值該怎麼求？
- 變異數 (Variance) 的意義是？
- 機率 (數學) 證明的一大要訣？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 7-1: 期望值 II
- 7-2: 隨機變數之函數
- 7-3: 條件機率分佈與失憶性



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



7-1: 期望值 II (EXPECTATION)

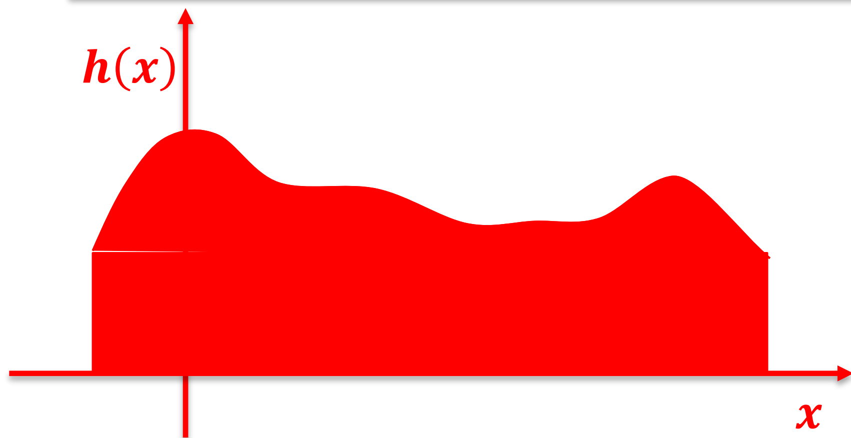
第七週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

積分的近似概念







$$\text{面積} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

$$\text{面積} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$$

$$\Rightarrow \text{面積} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta)\cdot\Delta$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值 (Expectation)



- 對連續的隨機變數 X 而言，想求期望值，我們用類似離散隨機變數的方式出發
- 將 X 的值以 Δ 為單位無條件捨去來近似
  結果：離散隨機變數 Y （當 $\Delta \to 0$ 時，$X \approx Y$）

$$X \in [0, \Delta) \to Y = 0\Delta$$
$$X \in [1\Delta, 2\Delta) \to Y = 1\Delta$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$X \in [n\Delta, (n+1)\Delta) \to Y = n\Delta$$

- 根據第五週：
  - $p_Y(n\Delta) = P(n\Delta \leq X < n\Delta + \Delta) \approx f_X(n\Delta) \cdot \Delta$

- $$E[X] = \lim_{\Delta \to 0} E[Y] = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \, P_Y(n\Delta)$$
$$= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\Delta \cdot f_X(n\Delta) \cdot \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$n\Delta \to x$, $f_X(n\Delta) \to f_X(x)$, $\Delta \to dx$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數之期望值



- 對於任一連續隨機變數 X 而言，其任意函數 $g(X)$ 亦是一隨機變數，亦有期望值
- $g(X)$ 期望值定義為

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

※ 離散隨機變數：$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質



- $E[\alpha\, g(X) + \beta\, h(X)]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha\, g(x) + \beta\, h(x)] \cdot f_X(x)\, dx$

- $= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx + \beta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_X(x)\, dx$

$= \alpha \cdot E[g(X)] + \beta \cdot E[h(X)]$



- Ex: $E[6\, X + 8\, X^2] = 6\, E[X] + 8\, E[X^2]$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值運算的性質



- $\boldsymbol{E[\alpha]}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \cdot f_X(x)\, dx = \alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \alpha$$

Ex: $\boldsymbol{E[6] = 6}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見的隨機變數函數期望值



- X的 n^{th} moment：

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, f_X(x) \, dx$$

  – Ex: $E[X^2]$ 是 X 的 2nd *moment*

  – Ex: $E[X^5]$ 是 X 的 5th*moment*

- X的變異數 (variance)：

$$E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 \, f_X(x) \, dx$$

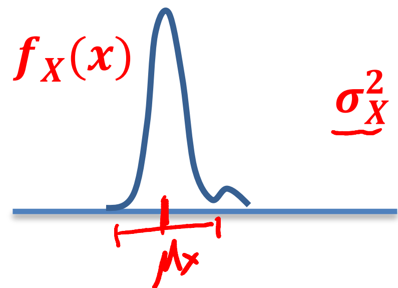


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

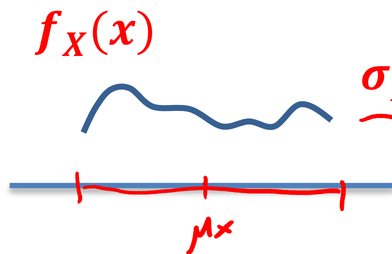
變異數 (Variance)



- Variance 通常符號表示為 $\sigma_X^2 = E[(X-\mu_X)^2]$
- 變異數隱含關於隨機變數 X 多「亂」的資訊



σ_X^2 小 ($\because x \approx \mu_X$)



σ_X^2 大 ($\because X$ 不見得接近 μ_X)

- 變異數的開根號便是標準差 (standard deviation)： σ_X

$$= \sqrt{Variance}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 便利算法



- $\sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2]$

$$= E\left[X^2 - 2\mu_X \cdot X + \mu_X^2\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + E[-2\mu_X X] + E[\mu_X^2]$$

$$= E\left[X^2\right] \underbrace{- 2\mu_X \cdot E[X] + \mu_X^2}_{-2\mu_X^2 + \mu_X^2} = \boxed{E\left[X^2\right] - \mu_X^2}$$

$$\Rightarrow E\left[X^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數



- $X \sim Exponential(\lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{1}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$
- $X \sim Erlang\,(n, \lambda)$：
  - $\mu_X = \frac{n}{\lambda}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{n}{\lambda^2}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續分佈之期望值/變異數



- $X \sim Gaussian\ (\mu, \sigma)$：
  - $\mu_X = \mu$
  - $\sigma_X^2 = \sigma^2$
- $X \sim UNIF\ (a, b)$：
  - $\mu_X = \frac{a+b}{2}$
  - $\sigma_X^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值推導範例

分部積分：

$$\int UdV = UV - \int VdU$$



- $X \sim Exponential(\lambda)$： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$e^{x} dx = de^{x}$

$$= -\int_0^{\infty} -x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\int_0^{\infty} x\, d\, e^{-\lambda x}$$

$U = x$, $V = e^{-\lambda x}$

$$= -\left[xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right]$$

$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$

$$= -\left[0 - 0 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 連續隨機變數的期望值定義？
- 連續隨機變數的函數的期望值？
- 「湊」字訣！
- 常見連續機率分佈之期望值、變異數？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



7-2: 隨機變數之函數

第七週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機變數的函數



- 隨機變數 $\boldsymbol{X}$ 的任意函數 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ 也是一個隨機變數
- 通常被稱為 Derived Random Variable



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如何求 $g(X)$ 機率分佈？



- 若 X 為離散：
  - 直接推 $g(X)$ 的PMF
- 若 X 為連續：
  - 先推 $g(X)$ 的 CDF，再微分得到PDF



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數



- Ex：某宅宅超愛戰LOL。每次一戰就連續戰 X 場不可收拾，已知 $X \sim GEO(0.2)$。某宅宅內心仍有一點清明，其良心亦會因戰過度而內疚，依戰的次數多寡，內疚程度 Y 分別為1, 2, 3 不同等級:

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \leq X \leq 3; \\ 2, & if\ 4 \leq X \leq 6; \\ 3, & if\ X \geq 7. \end{cases}$$

問$Y = g(X)$ 的機率分佈？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數



- $Y = g(X) = \begin{cases} 1, & if\ 1 \le X \le 3; \\ 2, & if\ 4 \le X \le 6; \\ 3, & if\ X \ge 7. \end{cases}$
- $X \sim GEO(0.2) \Rightarrow p_X(x) = (1-0.2)^{x-1} \cdot 0.2$ $= 0.8^{x-1} \cdot 0.2$
- $p_Y(1) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3)$
  $= 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.2$
- $p_Y(2) = p_X(4) + p_X(5) + P_X(6)$
  $= (0.8)^3 \cdot 0.2 + (0.8)^4 \cdot 0.2 + (0.8)^5 \cdot 0.2$
- $p_Y(3) = P(Y = 3) = 1 - p_Y(1) - p_Y(2)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

離散 X 之函數



- 當 X 為離散隨機變數時，
  $Y=g(X)$ 亦為離散隨機變數
- $Y=g(X)$ 之 PMF 為

$$p_{g(X)}(y)=\sum_{\text{會讓 } g(x)=y \text{ 的所有 } x} p_X(x)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數



- $Y = g(X)$ 且 X 為連續隨機變數時

  先算 $g(X)$ 的CDF：

$$F_{g(X)}(y) = P[g(X) \leq y]$$

- 若 $g(X)$ 可微分，再對 y 微分得到PDF：

$$f_{g(X)}(y) = \frac{d}{dy} F_{g(X)}(y)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 ($g(X) = aX + b$)



- Ex：若 $Y = 3X + 2$ ，請問 Y 的 PDF 跟 $f_X(x)$ 之關係為何？

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 2 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-2}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-2}{3}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-2}{3}\right) = \frac{dF_X\left(\frac{y-2}{3}\right)}{d\frac{y-2}{3}} \cdot \frac{d\frac{y-2}{3}}{dy} = f_X\left(\frac{y-2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$



- 若 $Y = aX + b$ 且 $a > 0$，則

$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(X \le \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

what if $a < 0$?

$$F_Y(y) = P(aX + b \le y) = P\left(\frac{aX+b-b}{a} \ge \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X \ge \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = -\frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = -\frac{dF_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{d\left(\frac{y-b}{a}\right)} \cdot \frac{d\left(\frac{y-b}{a}\right)}{dy} = -f_X\left(\frac{y-a}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX + b)$



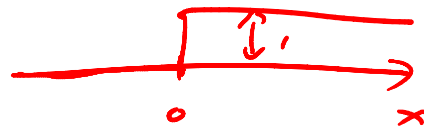
- Ex：若 $X \sim Exponential(\lambda)$，且 $Y = 2X$，請問 Y 之機率分佈為何？

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x), Y = 2X \ (a = 2, b = 0)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \lambda e^{-\lambda \frac{y}{2}} \cdot u\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} y} \cdot u(y)$$

$$\Rightarrow Y \sim Exponential\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

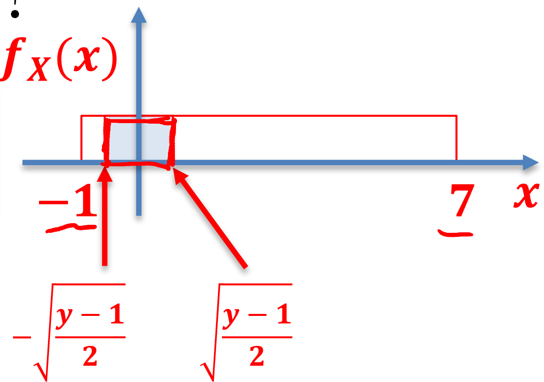
連續 X 之函數 ($g(X) = aX^2 + b$)

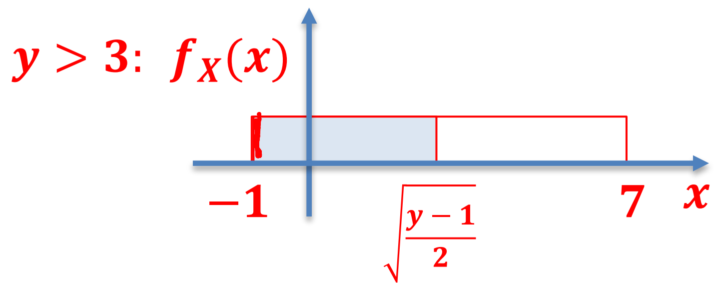
- Ex：若 $Y = 2X^2 + 1$，且已知 $X \sim UNIF(-1, 7)$。請問 Y 的 PDF 為何？

$$F_Y(y) = P(Y = 2X^2 + 1 \le y)$$
$$= P\left(X^2 \le \frac{y-1}{2}\right)$$
$$= P\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \le X \le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$$
$$= \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} f_X(x)\, dx$$

$$-1 = -\sqrt{\frac{y-1}{2}} \Rightarrow y = 3$$









Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

連續 X 之函數 $(g(X) = aX^2 + b)$



$$y \le 3: F_Y(y) = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$$y > 3: F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right)$$

$$\Rightarrow y \le 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{y-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$

$$y > 3: f_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}} + 1\right) = \frac{1}{32}\sqrt{\frac{2}{y-1}}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 隨機變數的函數又稱？
- 若隨機變數為離散，可直接推 $\boldsymbol{g(X)}$ 之 PMF
- 若隨機變數為連續，先推 $\boldsymbol{g(X)}$ 之 CDF 再微分得到 PDF 比較好算



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



7-3: 條件機率分佈與失憶性

第七週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

把條件機率用在機率分佈上

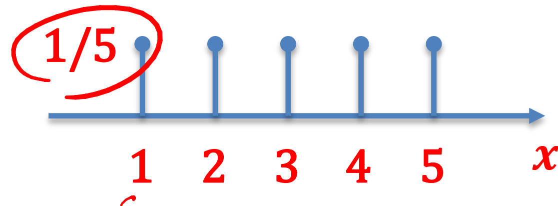


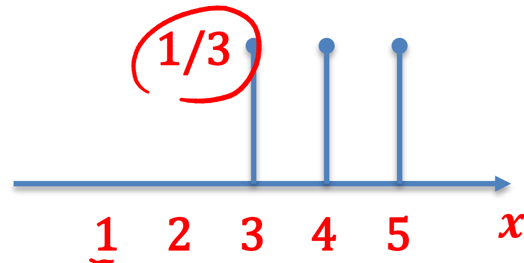
- Ex：為了更了解宅宅的心，店員妹亦開始戰 LOL。已知店員妹戰LOL場數 $X \sim UNIF\,(1, 5)$。若已知店員妹戰了兩場仍戰意甚濃、繼續戰。請問在此情況下，店員妹今日戰LOL場數 X 之機率分佈為何？

B：已戰兩場仍想戰

$$p_{X|B}(x) = P(X = x|B) = \frac{P(X = x, B)}{P(B)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X = x)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}, & x \in B : x = 3, 4, 5 \\ 0, & x \notin B, x = otherwise \end{cases}$$







Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)



- 若 $\boldsymbol{X}$ 是一離散隨機變數，其 PMF 為 $\boldsymbol{p_X(x)}$。若已知某事件 $\boldsymbol{B}$ 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PMF: $\boldsymbol{p_{X|B}(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x \in B}: & \dfrac{p_X(x)}{P(B)}, \\ \boldsymbol{x \notin B}: & \mathbf{0}. \end{cases}$
  - CDF: $\boldsymbol{F_{X|B}(x)} = \sum_{u \le x} \boldsymbol{p_{X|B}(u)} = \sum_{u \le x, u \in B} \dfrac{p_X(x)}{P(B)}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

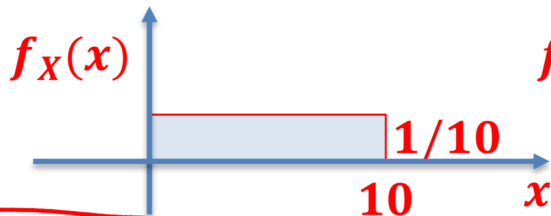
把條件機率用在機率分佈上

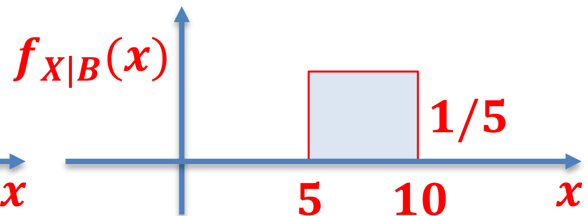


- Ex：店員妹等公車上班。通常等公車的時間 $\boldsymbol{X}$，從零到十分鐘間可能性均等。若店員妹已等了五分鐘車還沒來。請問在此情況下，等車時間 $\boldsymbol{X}$ 之機率分佈為何？

$X \sim UNIF(0, 10)$

$B: X > 5 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$





$$f_{X|B}(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta] | B)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{P(X \in [x, x+\Delta], X \in B)}{P(X \in B)}$$

$$= \begin{cases} x \in B: \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(X \in [x, x+\Delta])}{\Delta \, P(B)} = \frac{f_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B & 0. \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件機率分佈 (Conditional Distribution)



- 若 X 是一連續隨機變數，其 PDF 為 $f_X(x)$。若已知某事件 B 已發生，則在此情況下之條件機率分佈為：
  - PDF: $f_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B: & \dfrac{f_X(x)}{P(B)}, \\ x \notin B: & 0. \end{cases}$
  - CDF: $F_{X|B}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|B}(u)du = \int_{-\infty \le u \le x, u \in B} \dfrac{f_X(u)}{P(B)} du$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)



- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[X\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_{X|B}(x) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|B}(x)dx & (\text{連續}) \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)



- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$E[g(X)\,|B] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p_{X|B}(x) & \text{(離散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{X|B}(x)dx & \text{(連續)} \end{cases}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

條件期望值 (Conditional Expectation)



- 若知B已發生，則此情況下條件期望值為：

$$Var(X|B) = E\left[\left(X_{|B} - \mu_{X|B}\right)^2\right] = E\left[\left(X - \mu_{X|B}\right)^2 \middle| B\right]$$

$$= E\left[X^2|B\right] - \left(\mu_{X|B}\right)^2$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)



- 宅宅與店員妹相約出門。宅宅出門前在戰LOL，場數 $X \sim GEO\,(0.2)$。店員妹等了兩場後，宅宅還在玩。店員妹甚怒，怒催宅宅。宅宅曰「快好了、快好了」。問宅宅剩餘場數 X' 之機率分佈為何？ $B: X > 2, X' = X_{|B} - 2$

$$p_{X|B}(x) = \begin{cases} x \in B(x > 2): & \dfrac{P_X(x)}{P(B)} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{\sum_{x=3}^{\infty} 0.8^{x-1} \cdot 0.2} = \dfrac{0.8^{x-1} \cdot 0.2}{0.8^2 \cdot 0.2 \cdot \frac{1}{1-0.8}} = 0.8^{x-3} \cdot 0.2 \\ x \le 2: & 0 \end{cases}$$

$$p_{X'}(x) = P(X' = x) = P\left(X_{|B} - 2 = x\right) = P(X_{|B} = x + 2)$$

$$P_{X|B}(x+2) = 0.8^{x+2-3} \cdot 0.2 = 0.8^{x-1} \cdot 0.2 \Rightarrow X' \sim GEO(0.2)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)



- 店員妹與宅宅相約出門。店員妹出門前化妝時間為 X（小時），$X \sim Exponential(1)$。經過一小時後，仍未完成。宅宅甚怒，怒催店員妹。店員妹曰「快好了、快好了」。問店員妹剩餘化妝時間 X' 機率分佈為何？ $B: X > 1, X' = X_{|B} - 1$

$$F_{X'}(x) = P(X' \leq x) = P\left(X_{|B} - 1 \leq x\right) = P(X_{|B} \leq x + 1)$$

$$F_{X|B}(x+1) = \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = ? \quad F_{X'}(x) = ? \quad f_{X'}(x) = ?$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)



$B: X > 1$

$$f_{X|B}(u) = \begin{cases} u \in B: (u > 1) & \dfrac{f_X(u)}{P(B)} = \dfrac{1 \cdot e^{-1u}}{P(X > 1)} = \dfrac{e^{-u}}{1 - F_X(1)} \\ & = \dfrac{e^{-u}}{1 - (1 - e^{-1})} = \dfrac{e^{-u}}{e^{-1}} = e^{-(u-1)} \\ u \notin B: & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'_X(x) = P(X' \leq x) = P\left(X_{|B} - 1 \leq x\right) = P\left(X_{|B} \leq x + 1\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{x+1} f_{X|B}(u)du = \int_{1}^{x+1} e^{-(u-1)}du = \left[-e^{-(u-1)}\right]_1^{x+1}$$

$$= -e^{-x+1-1} - \left(-e^{-(1-1)}\right) = 1 - e^{-x}$$



$$\Rightarrow f_{X'}(x) = 1 \cdot e^{-1 \cdot x}, x \geq 0; 0\ otherwise. \Rightarrow X' \sim Exponential(1)$$

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

失憶性 (Memoryless)



- Geometric 跟 Exponential 機率分佈皆有失憶性的性質
- 不管事情已經進行多久，對於事情之後的進行一點影響都沒有！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 某個事件發生後，隨機變數的行為跟其機率分佈也會改變：條件機率分佈
- 條件隨機變數也是一個健全、可愛的隨機變數！
- 身為一個健全、可愛的隨機變數，人家一般隨機變數該有的條件隨機變數也應該都有！PMF (PDF)、CDF、期望值、Mean、Variance 等
- 隨機變數中會失憶的是？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 8-1: 聯合機率分佈
- 8-2: 邊際機率分佈
- 8-3: 雙變數期望值



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



8-1: 聯合機率分佈 (JOINT PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週

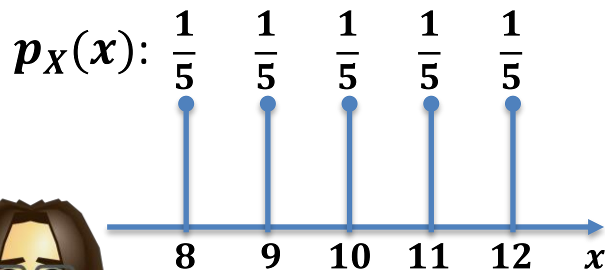


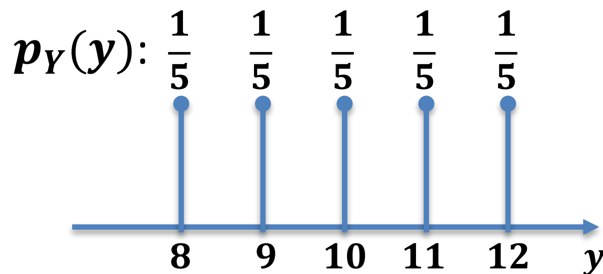
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

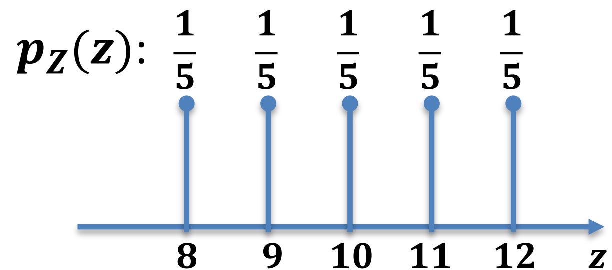
當小明出國去交換時



- X: 小美臉書/QQ 離線時間，$X \sim UNIF(8, 12)$
- Y: 小華臉書/QQ 離線時間，$Y \sim UNIF(8, 12)$
- Z: 小園臉書/QQ 離線時間，$Z \sim UNIF(8, 12)$
- 假設 X, Y, Z 都是離散隨機變數









Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

當小明出國去交換時



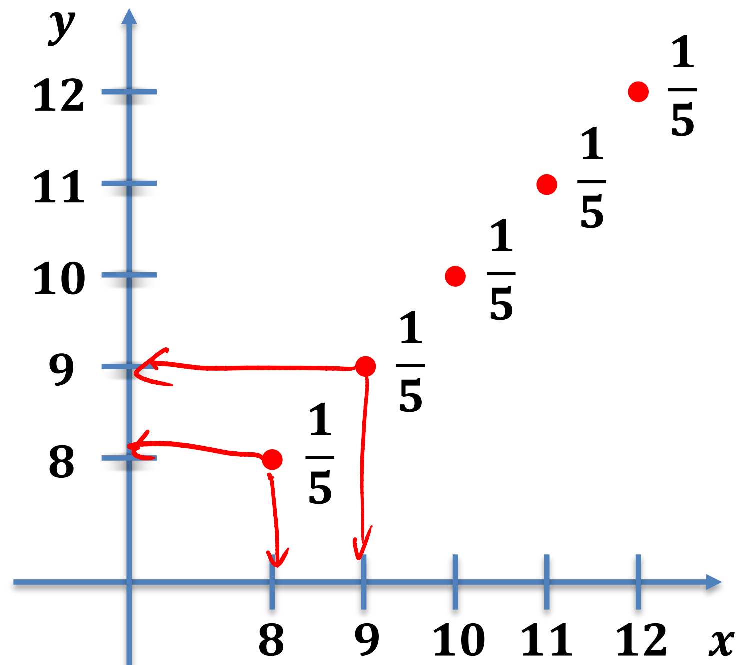
- 若將小美離線時間 X 與小園離線時間 Z 一起看呢？
- 畫出 $P(X = x, Z = z)$：

Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

滿山盡是君雅照！



- 若將小美離線時間 X 與小園離線時間 Y 一起看呢？
- 畫出 $P(X=x, Y=y)$，赫然發現！





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合機率分佈



- 同時將多個隨機變數的行為一起拿來看，我們可以看出更多以往看不到的資訊！
- 同時考慮多個隨機變數的機率分佈稱之為聯合機率分佈 (joint probability distribution)
- 聯合機率分佈亦有離散與連續的分別



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)



- 若 X, Y 皆為離散隨機變數，我們可以定義他們的聯合PMF

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ 且 } Y = y)$$

- 聯合PMF 決定了X, Y 的聯合機率分佈



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF (Joint PMF)

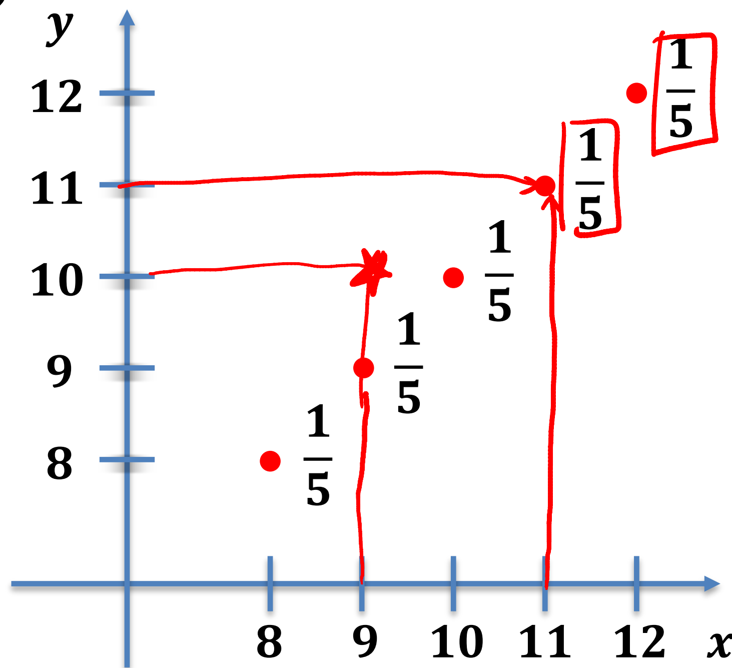


Ex: 小美離線時間 X 與小華離線時間 Y 的聯合 PMF：

$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$：

$P_{X,Y}(9,10) = 0$

$P_{X,Y}(11,11) = \frac{1}{5}$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 的性質

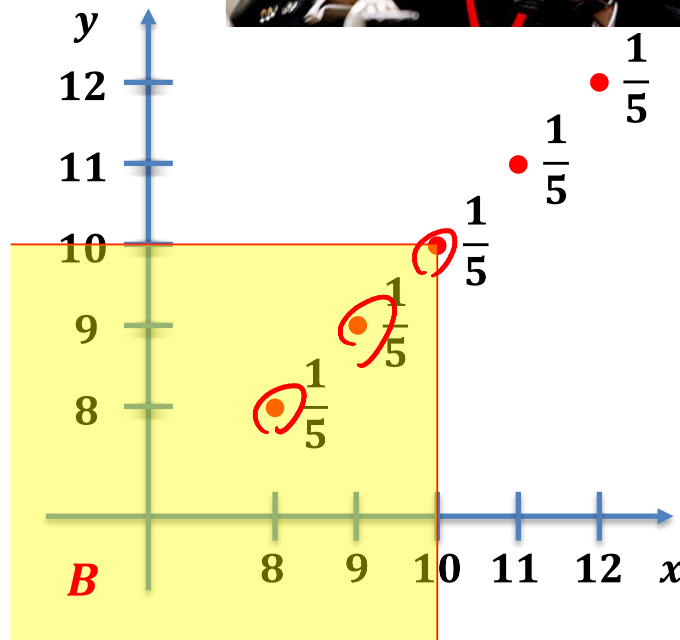


- $0 \le p_{X,Y}(x,y) \le 1$
- $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y) = 1$
- X, Y 獨立

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$
$$= P(X = x) \cdot P(Y = y)$$
$$= P_X(x) P_Y(y)$$

- 對任何事件 B： $P(B) = \sum_{(x,y)\in B} P_{X,Y}(x,y)$

Ex: B：美、華下線時間不晚於十點



$$P(B) = P_{X,Y}(8,8) + P_{X,Y}(9,9) + P_{X,Y}(10,10)$$



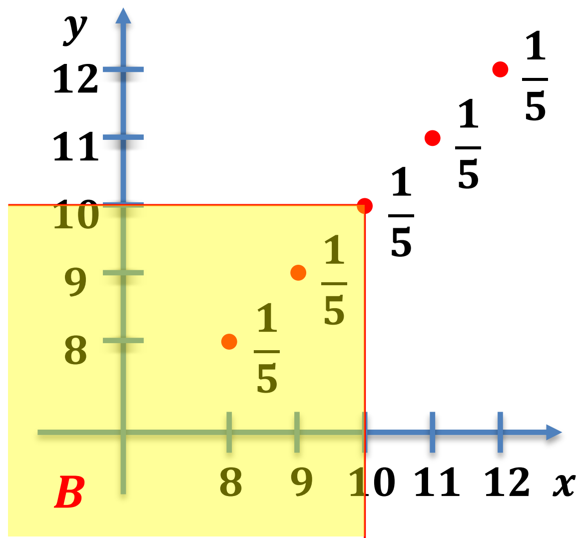
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- 若考慮兩個隨機變數 X, Y 的聯合機率分佈，我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}(10,10) =$ 3/5







Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

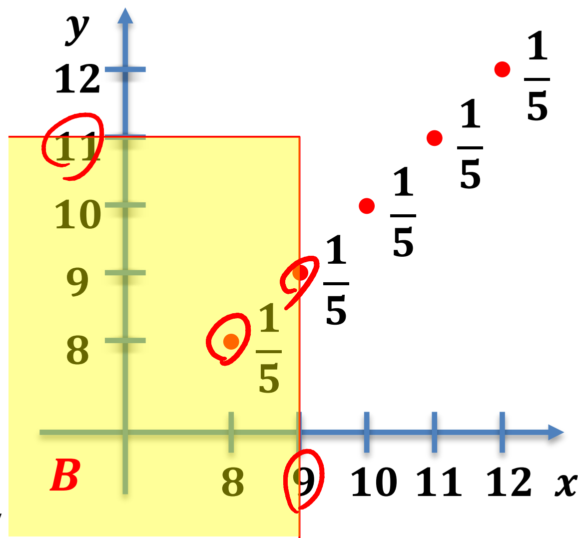
聯合 CDF (Joint CDF)



- 若考慮兩個隨機變數 X, Y 的聯合機率分佈，
  我們也可定義出所謂的聯合 CDF：

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$F_{X,Y}(9, 11) = \frac{2}{5}$



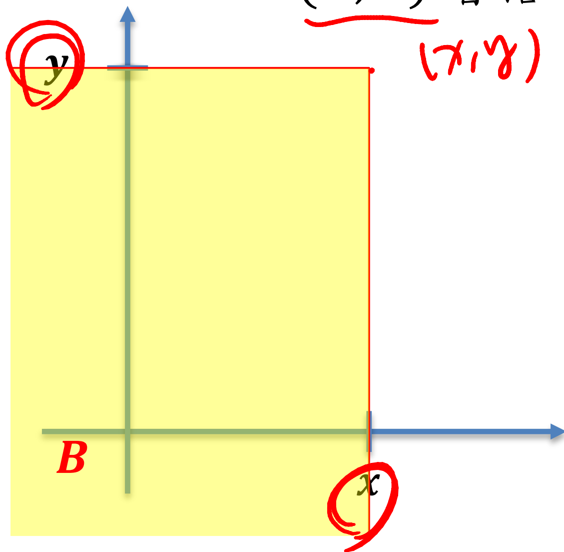


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF (Joint CDF)

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x \text{ 且 } Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

  $= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率



1D: $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(X \leq x)$

$= (X,Y)$ 會落在黃色區域的機率







Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 CDF 的性質



- $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$
- 若 $x_1 \leq x_2$ 且 $y_1 \leq y_2$, 則 $F_{X,Y}(x_1,y_1) \leq F_{X,Y}(x_2,y_2)$
- $F_{X,Y}(x,\infty) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = P(X \leq x) = F_X(x)$
- $F_{X,Y}(\infty,y) = P(X \leq \infty, Y \leq y) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$
- $F_{X,Y}(\infty,\infty) = P(X \leq \infty, Y \leq \infty) = 1$
- $F_{X,Y}(x,-\infty) = P(X \leq x, Y \leq -\infty) \leq P(Y \leq -\infty) = 0$
- $F_{X,Y}(-\infty,y) = P(X \leq -\infty, Y \leq y) \leq P(X \leq -\infty) = 0$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

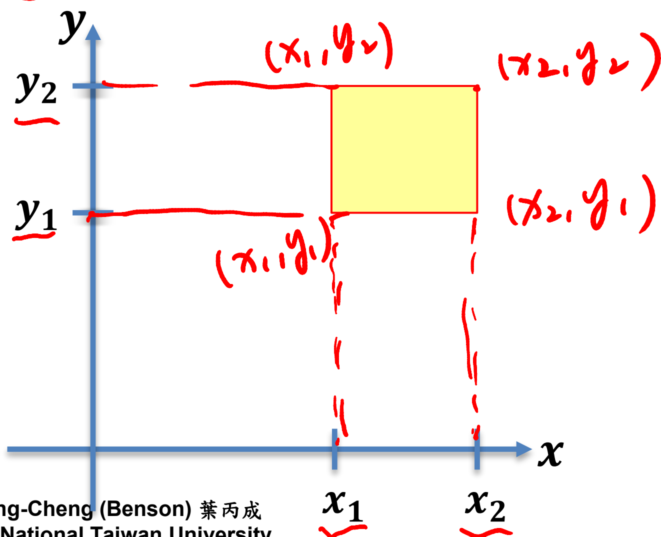
聯合 CDF 的性質

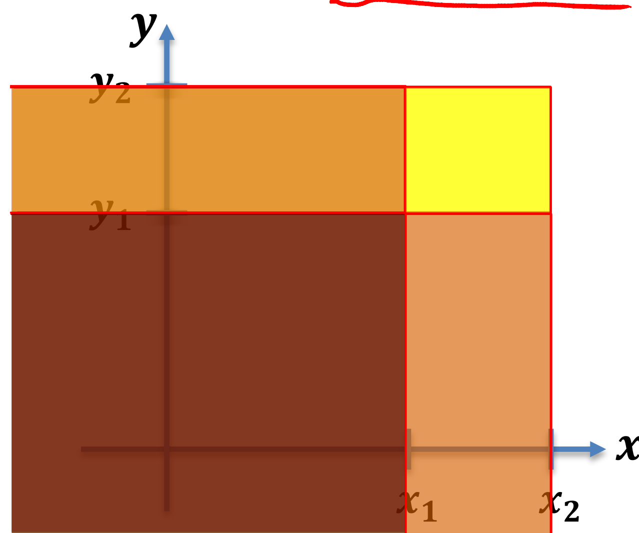


- 四方格性質：

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2)$$
$$= F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1)$$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$





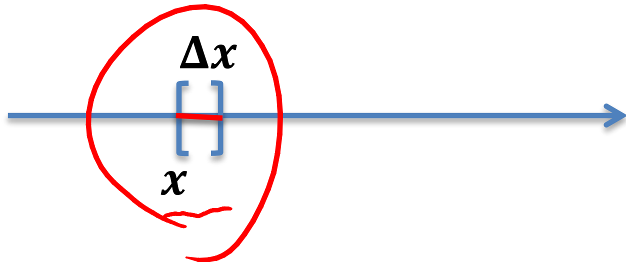


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

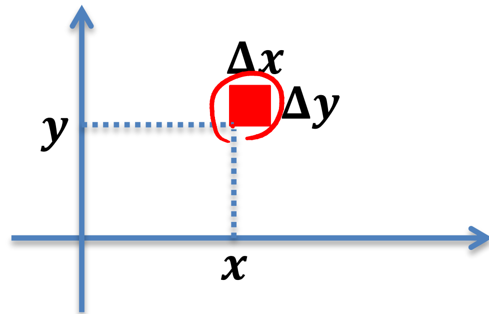
若X, Y 皆為連續隨機變數怎辦？



- 回想之前一個變數時PDF怎麼定義？
- $f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \in [x, x+\Delta x])}{\Delta x}$



- 如何延伸到兩個變數的情況？
- $f_{X,Y}(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X,Y) \in ■)}{\Delta x \Delta y}$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)



- 若 X, Y 皆為連續隨機變數，我們可以定義聯合 PDF：

$$f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P\big((X,Y) \in \blacksquare\big)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x \text{ 且 } y \le Y \le y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y) + F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x \Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y+\Delta y) - F_{X,Y}(x, y+\Delta y)}{\Delta x} - \frac{F_{X,Y}(x+\Delta x, y) - F_{X,Y}(x,y)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x, y+\Delta y) \qquad \frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x,y)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)

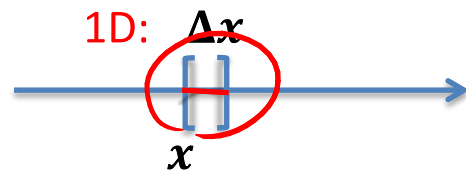


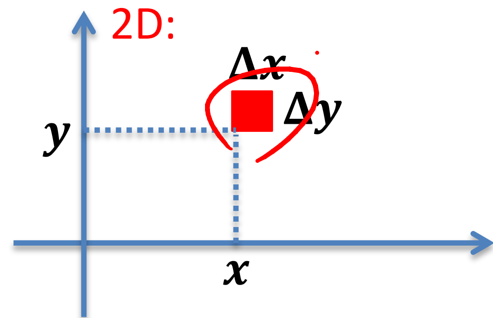
- $f_{X,Y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial F_{X,Y}(x,y+\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x}\right]$

  $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

  $\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

- 1D: Δx 極小時 $\Rightarrow P(X \in [x, x+\Delta x]) \approx f_X(x) \cdot \Delta x$
- 2D: $\Delta x, \Delta y$ 極小時 $\Rightarrow P((X,Y) \in$ ■ $) \approx f_{X,Y}(x,y) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$







Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

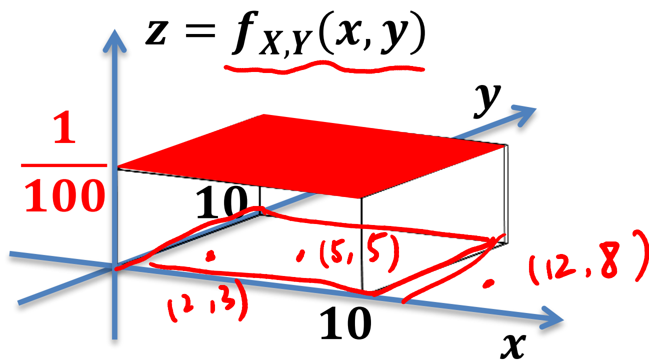
聯合 PDF



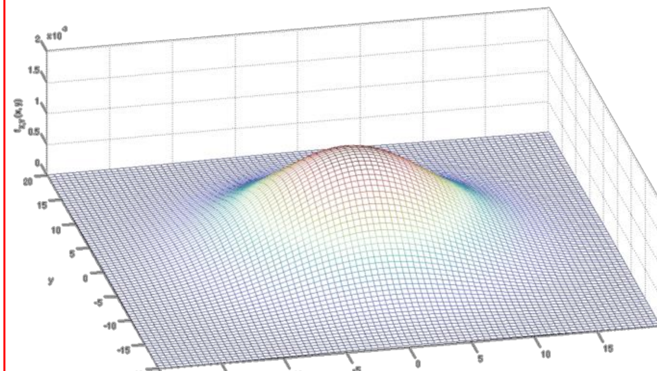
Ex：小美等公車時間為 X, 小園等公車時間為 Y

X,Y 兩者獨立且皆為連續之機率分佈 $UNIF(0,10)$。則

X,Y之聯合 PDF 為



其他聯合 PDF 的例子：
Bivariate Gaussian





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF (Joint PDF)



- 聯合 PDF 亦決定了X, Y 的聯合機率分佈
- 聯合 PDF 跟聯合 CDF 之間的關係：

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$



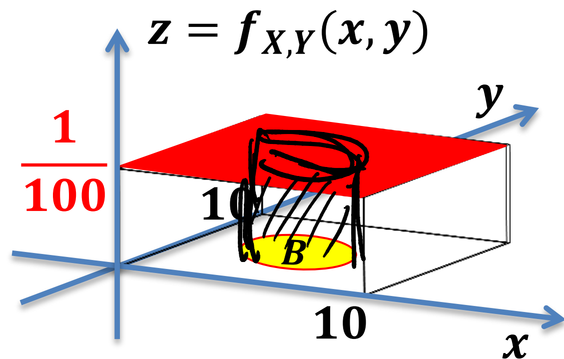
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 的性質



- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$
- 若 X, Y 獨立 $\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$
- 對任何事件 B,

$$P(B) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 何謂聯合機率分佈？
- 為何要看聯合機率分佈？
- 聯合 PMF 的定義？
- 聯合 CDF 的定義？
- 聯合 PDF 的定義？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



8-2: 邊際機率分佈 (MARGINAL PROBABILITY DISTRIBUTION)

第八週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

已知聯合 PMF，欲得個別 PMF



- Ex：X, Y 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下：

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $p_X(x) = ?\ p_Y(y) = ?$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PMF (Marginal PMF)



- 已知聯合 PMF $p_{X,Y}(x,y)$，則可求得 $p_X(x)$、$p_Y(y)$，稱之為邊際 PMF
- 邊際 PMF 算法：
  - $p_X(x) = P(X=x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$
  - $p_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P(X=x, Y=y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} P_{X,Y}(x,y)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)



- 已知聯合 PDF $f_{X,Y}(x,y)$，則可求得 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，稱之為邊際 PDF
- 邊際 PDF 算法：
  - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
  - $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$



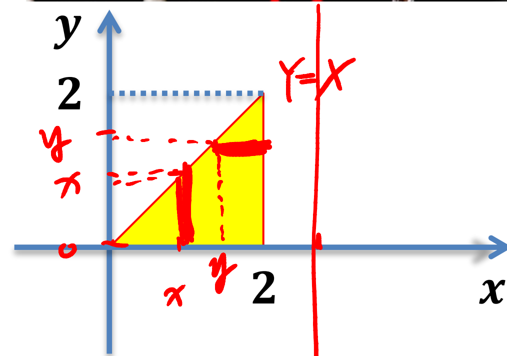
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

邊際 PDF (Marginal PDF)



- Ex：已知

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0.5, & \text{if } 0\le y\le x\le 2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$



- $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_0^x 0.5\,dy=0.5\,x & \text{if } 0\le x\le 2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

- $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_y^2 0.5\,dx=1-0.5y & \text{if } 0\le y\le 2,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 邊際 PMF 的定義？怎麼算？
- 邊際 PDF 的定義？怎麼算？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



8-3: 雙變數期望值

第八週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值



- 回想只考慮一個離散隨機變數 X 時其任意函數 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, p_X(x)$$

- 若同時考慮兩個離散隨機變數 X, Y 時，他們的任意函數 $h(X,Y)$ 的期望值是

$h(X,Y) = X^2$

$$E[h(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PMF 下的期望值



- Ex：X, Y 分別為小美、小麗臉書/QQ 離線時間。聯合 PMF 如下

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=8$	$X=9$	$X=10$
$Y=8$	0.2	0.1	0.05
$Y=9$	0.05	0.2	0.1
$Y=10$	0.05	0.1	0.15

- $E[|X-Y|] = \sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} |x-y| \cdot p_{X,Y}(x,y)$

$= 1\cdot 0.05 + 2\cdot 0.05 + 1\cdot 0.1 + 1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.05 + 1\cdot 0.1$

$= 0.55$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 下的期望值



- 回想只考慮一個連續隨機變數 X 時其任意函數 $g(X)$ 的期望值是：

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$$

- 若同時考慮兩個連續隨機變數 X, Y 時，他們的任意函數 $h(X,Y)$ 的期望值是

$$E[h(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

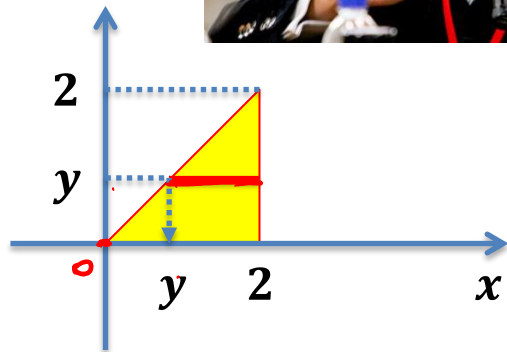


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

聯合 PDF 下的期望值



- Ex：已知 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5, & if\ 0 \leq y \leq x \leq 2, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$



$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{0}^{2}\int_{y}^{2}(x+y)\cdot 0.5dxdy$$

$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{2}\right]_y^2 dy = \int_{0}^{2}\left(1+y-\frac{3}{4}y^2\right)dy = \left[y+\frac{y^2}{2}-\frac{3}{12}y^3\right]_0^2 = 2+2-2=2$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質



- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

證明 (離散)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)]\, p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \underbrace{\alpha \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_1(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_2(x,y)\, p_{X,Y}(x,y)}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質



- $E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)] = \alpha E[h_1(X,Y)] + \beta E[h_2(X,Y)]$

證明 (連續)：

$E[\alpha\, h_1(X,Y) + \beta\, h_2(X,Y)]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha h_1(x,y) + \beta h_2(x,y)] \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \underbrace{\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\alpha\, E[h_1(X,Y)]} + \underbrace{\beta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_2(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy}_{\beta\, E[h_2(X,Y)]}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質



- 若X, Y獨立，則

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

證明(離散)：

$$E[g(X)h(Y)] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y) \cdot p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$= \left[\sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p_X(x)\right] \cdot \left[\sum_{y=-\infty}^{\infty} h(y) \cdot p_Y(y)\right] = E[g(X)]\, E[h(Y)]$$

$P(X=x, Y=y)$
$= P(X=x) \cdot P(Y=y)$
$= p_X(x) \cdot p_Y(y)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

期望值的性質



- 若 X, Y 獨立，則

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

證明(連續)：

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f_Y(y)\,dy = E[g(X)] \cdot E[h(Y)]$$

E[g(X)]   E[h(Y)]



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Variance 相關的性質



- $Var(X+Y) = E[(X+Y-E[X+Y])^2]$ ($E[X+Y] = \mu_X+\mu_Y$)

$$= E[(X+Y-\mu_X-\mu_Y)^2]$$
$$= E[(\underbrace{X-\mu_X}_{A}+\underbrace{Y-\mu_Y}_{B})^2]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2+(Y-\mu_Y)^2+2(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= E[(X-\mu_X)^2]+E[(Y-\mu_Y)^2]+2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= Var(x)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

$2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = Cov(X,Y)$

※ X,Y獨立 $\Rightarrow 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
$= 2E[(X-\mu_X)]E[(Y-\mu_Y)] = 0$ ($E[Y]-E[\mu_Y]$)
$\Rightarrow Cov(X,Y)=0$
$\Rightarrow Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本節回顧



- 期望值的定義？
- 期望值的性質？
- 兩隨機變數獨立的話，期望值的計算？



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



機　率

台大電機系 葉丙成

微博: weibo.com/yehbo　臉書: facebook.com/prof.yeh

部落格: pcyeh.blog.ntu.edu.tw



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週主題概述



- 9-1: 隨機變數之和
- 9-2: MGF
- 9-3: 多個隨機變數和
- 9-4: 中央極限定理 (萬佛朝宗)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



9-1: 隨機變數之和

第九週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$Z = X + Y$ 的機率分佈？



- Ex: 老張麵店只賣牛肉麵跟豆腐腦已知每天的麵銷量 X 碗與豆腐腦銷量 Y 碗的聯合機率分佈 $p_{X,Y}(x,y)$ 兄弟們約老張收攤後喝酒小聚。老婆規定老張洗完碗後才能赴約。請問老張洗碗數量的機率分佈是？

$$p_Z(3) = p(X+Y=3) = \begin{matrix} p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,1) \\ p_{X,Y}(0,3) + p_{X,Y}(3,0) \\ \vdots \end{matrix}$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, 3-x)$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(3-y, y)$$

$$\Rightarrow p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(z-y, y)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

$Z = X + Y$ 的機率分佈？



- Ex: 小明寫國文作業的時間 X 與算術作業 Y 的聯合機率分佈 $f_{X,Y}(x,y)$。兄弟們約小明喝酒小聚老媽規定小明寫完作業後才能赴約。請問小明兄弟要等多久時間的機率分佈是？

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z-y, y)\,dy$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X, Y 獨立？

- 離散：$Z = X + Y$

$$p_Z(z) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, z-x) = \underbrace{\sum_{x=-\infty}^{\infty} p_X(x) \cdot p_Y(z-x)}_{\text{discrete convolution}} = \underbrace{\sum_{y=-\infty}^{\infty} p_X(z-y) \cdot p_Y(y)}_{\text{discrete convolution}}$$

$$= p_X(z) * p_Y(z)$$

- 連續：$Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx}_{\text{continuous convolution}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy}_{\text{continuous convolution}}$$

$$= f_X(z) * f_Y(z)$$





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

如果有不只兩個隨機變數?



- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，

若 $X_1, \ldots, X_n$ 獨立

$p_{X_1+X_2}(x)$ $p_{X_1+X_2+X_3}(x)$

(離散): $p_X(x) = p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x) * p_{X_3}(x) * \cdots * p_{X_n}(x)$

(連續): $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * f_{X_3}(x) * \cdots * f_{X_n}(x)$

- 很複雜，怎麼辦？MGF



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



9-2: MGF (MOMENT GENERATING FUNCTION)

第九週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？



- 先看個例子吧！辛苦的紅娘業

小園超宅、小麗超夯
任務：撮合他們
（超難！）

轉換：分別送去亞馬遜荒野
換新的洋名、造型、身分

撮合：一男一女、荒郊野嶺
周圍鬼哭神號，只有營火，
和你我的相互依偎！
（超簡單！）

逆轉換：送他們回文明世界
從此在一起了！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？



- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}]$, $\phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}]$

$\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_{X_1}(x)$

給定 $p_{X_1}(x)$、$p_{X_2}(x)$

任務：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x)$

（超麻煩！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？



- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

給定：$p_{X_1}(x), p_{X_2}(x), \cdots, p_{X_n}(x)$

任務：$p_{X_1}(x) * p_{X_2}(x) * \cdots * p_{X_n}(x)$

（超麻煩！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Convolution 很不好算，怎辦？



- 辛苦的 convolution，有法偷懶？

轉換：送他們到 s 世界，分別作 MGF 變身

$\phi_{X_1}(s) = E[e^{sX_1}], \phi_{X_2}(s) = E[e^{sX_2}], \cdots, \phi_{X_n}(s) = E[e^{sX_n}]$

$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_{X_1}(x)\,dx$

給定：$f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \cdots, f_{X_n}(x)$

任務：$f_{X_1}(x) * f_{X_2}(x) * \cdots * f_{X_2}(x)$

（超麻煩！）

撮合：相乘就行

$\phi_{X_1}(s) \cdot \phi_{X_2}(s) \cdots \phi_{X_n}(s)$

（超簡單！）

逆轉換：從 s 世界送回 x 世界

從此在一起了！



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF (Moment Generation Function)



- MGF $\phi_X(s)$ 定義：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \begin{cases} \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x) & \text{(離散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\,dx & \text{(連續)} \end{cases}$$

- 逆轉換怎麼做？

通常靠查表

$p_X(x)$	$\phi_X(s)$

$f_X(x)$	$\phi_X(s)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我說 MGF 為什麼叫 MGF 呢？



- 還記得什麼叫 moment 嗎？ $E[X^n]$ n th moment
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有關係嗎？離散 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x)$$

$$\phi'_X(s) = \frac{d}{ds}\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \frac{de^{sx}}{ds} p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot e^{sx} \cdot p_X(x)$$

- $\phi'_X(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot e^{0 \cdot x} \cdot p_X(x) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot 1 \cdot p_X(x) = E[X]$ 1st moment
- $\phi_X^{(n)}(0) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n \cdot e^{sx} \cdot p_X(x)|_{s=0} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^n \cdot p_X(x) = E[X^n]$ n th moment



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

我說 MGF 為什麼叫 MGF 呢？



- 還記得什麼叫 moment 嗎？ $E[X^n]$
- $\phi_X(s)$ 跟 moment 有關係嗎？連續 case：

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$$\phi'_X(s) = \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{de^{sx}}{ds} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx$$

$x e^{sx}$

- $\phi'_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot 1 \cdot f_X(x)\, dx = E[X]$
- $\phi_X^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot e^{sx} \cdot f_X(x)\, dx \Big|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot f_x(x)\, dx = E[X^n]$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

MGF 的重要性質



- $Y = aX + b$

$$\phi_Y(s) = E[e^{sY}] = E[e^{s(aX+b)}]$$

$$= E[e^{saX} \cdot e^{sb}]$$

$$= e^{sb} \cdot E[e^{saX}]$$

$$= e^{sb} \cdot \phi_X(as)$$

$\phi_X(s) = E[e^{sX}]$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF



- $X \sim Bernoulli(p)$: $p_X(0) = 1 - p, p(1) = p$

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] = e^{s\cdot 0}\cdot p_X(0) + e^{s\cdot 1}\cdot p_X(1)$

  $= 1\cdot(1-p) + e^s\cdot p = 1 - p + pe^s$

- $X \sim BIN(n, p)$: 作 n 次實驗成功次數等於各實驗成功次數的總和

  $\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_i 獨立, $X_i \sim Bernoulli(p)$,

  $\phi_{X_i}(s) = 1 - p + pe^s$

  $\Rightarrow \phi_X(s) = \phi_{X_1}(s)\cdot\phi_{X_2}(s)\cdots\phi_{X_n}(s) = [1 - p + pe^s]^n$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF



- $X \sim Geometric(p)$:

$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$

- $X \sim Pascal(k, p)$: 看到第 k 次成功的花的總實驗次數等於第 1 號成功花多少次＋第 2 號成功花多少次＋...＋第 k 號成功花多少次

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, X_i 獨立, $X_i \sim Geometric(p)$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdots \phi_{X_k}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^k$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見離散機率分佈之 MGF



- $X \sim Poisson\,(\alpha)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim UNIF\,(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續機率分佈之 MGF



- $X \sim Exponential(\lambda)$:

$\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim Erlang(n, \lambda)$:

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, X_i 獨立, $X_i \sim Exponential(\lambda)$

$\Rightarrow \phi_X(s) = E[e^{sX}] = \phi_{X_1}(s) \cdots \phi_{X_n}(s) = [\phi_{X_1}(s)]^n$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

常見連續機率分佈之 MGF



- $X \sim UNIF(a, b)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$

- $X \sim Gaussian(\mu, \sigma)$:

  $\phi_X(s) = E[e^{sX}] =$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



9-3: 多個隨機變數之和

第九週



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

獨立隨機變數之和



- $X_1, X_2, \ldots$ 獨立，且各自都有一模一樣的機率分佈，表示為

$$\{X_i\}\ I.I.D.$$

Independently and Identically Distributed

- $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，$n$ 為常數，請問 X 的機率分佈？

離散: $p_X(x) = p_{X_1}(x) * p_{X_1}(x) * \cdots * p_{X_1}(x)$

連續: $f_X(x) = f_{X_1}(x) * f_{X_1}(x) * \cdots * f_{X_1}(x)$

$\phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^n$

$p_{X_1}(x) = p_{X_i}(x)$

$f_{X_i}(x) = f_{X_1}(x)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 將太的壽司



- 壽司飯糰的理想重量是 13 公克。將太初當學徒，每次抓飯量為常態分佈，期望值是 14 ，標準差是 3 。師父要將太每天練習作 100 個壽司才能休息，做完的壽司都得自己吃掉。請問將太每天吃的飯量的機率分佈？

X_i: 第 i 個壽司的飯量, $\{X_i\}$ I.I.D

$X_i \sim N(14, 9) \Rightarrow \phi_{X_i}(s) = \phi_{X_1}(s) = e^{\mu s + \frac{\sigma^2}{2} s^2} = e^{14s + \frac{9}{2}s^2}$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\Rightarrow \phi_X(s) = [\phi_{X_1}(s)]^{100} = [e^{14s + \frac{9}{2}s^2}]^{100} = e^{1400s + \frac{900}{2}s^2}$

$\Rightarrow X \sim N(1400, 900), \mu_X = 1400, \sigma_X^2 = 900$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

隨機個數之獨立隨機變數和



- $X_1, X_2, \ldots$ I.I.D.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

若 N 本身也為隨機變數，其機率分佈已知，那 X 的機率分佈找的到嗎？

N: $p_N(n)$ 已知

$$\Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\tilde{s}\,n} \cdot p_N(n)$$

$$\tilde{s} = \ln \phi_{X_1}(s)$$

$$\phi_X(s) = E[e^{sX}] = E[e^{sX_1 + sX_2 + \cdots + sX_N}]$$

$$= E[e^{sX_1} \cdot e^{sX_2} \cdot \ldots \cdot e^{sX_N}]$$

$$= E_N\left[E[e^{sX_1}] \cdot E[e^{sX_2}] \cdot \ldots \cdot E[e^{sX_N}]\right]$$

$$= E_N\left[[\phi_{X_1}(s)]^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\phi_{X_1}(s)\right)^n \cdot p_N(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\ln(\phi_X(s))\,n} \cdot p_N(n) = \phi_N\left(\ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)\right)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

Ex: 如果不景氣呢？



- 因為不景氣，師父的生意有一搭沒一搭，沒那麼多錢讓將太揮霍。每天可以練習的壽司數量是由當天生意決定的。每天可以練習的壽司數量是一個 Poisson 分佈，期望值為 75；將太功夫依然沒有長進，每次抓的飯量為常態分佈，期望值是 14 ，標準差是 4。請問阿明每天吃的飯量的機率分佈？

$$N \sim POI(75) \Rightarrow \phi_N(\tilde{s}) = e^{75(e^{\tilde{s}}-1)}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,\ X_1 \sim N(14, 16)$$

$$\Rightarrow \phi_{X_1}(s) = e^{14s+8s^2}$$

$$\phi_X(s) = \phi_N\left(ln\left(\phi_{X_1}(s)\right)\right) = e^{75\left(e^{ln(\phi_{X_1}(s))}-1\right)} = e^{75(\phi_{X_1}(s)-1)} = e^{75\left(e^{14s+8s^2}-1\right)}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University



9-4: 中央極限定理 (萬佛朝宗)

第九週



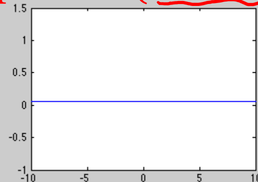
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:

$X_1 \sim UNIF(-10, 10)$





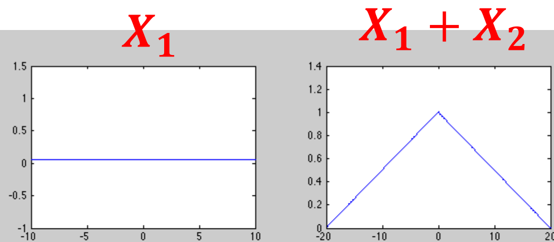
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:

X_1 $X_1 + X_2$



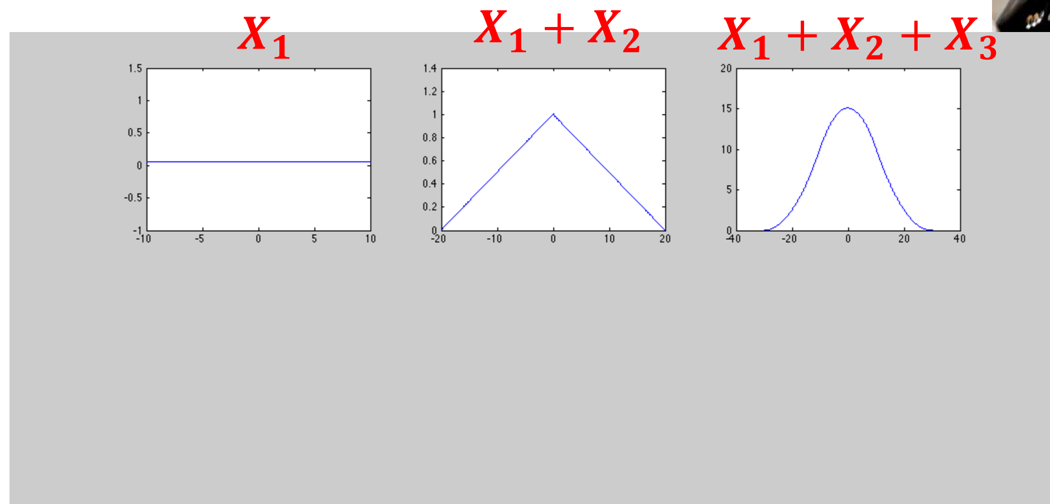


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:



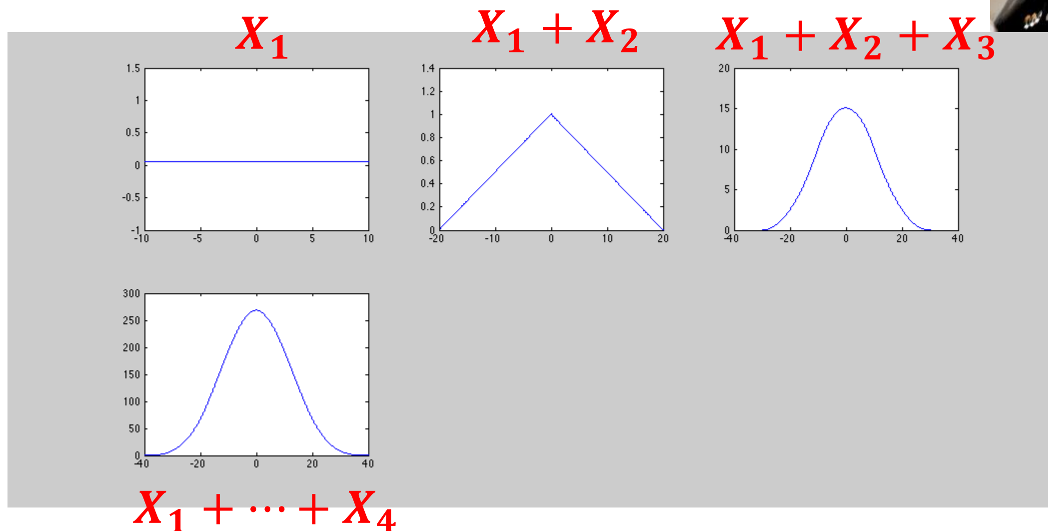


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:



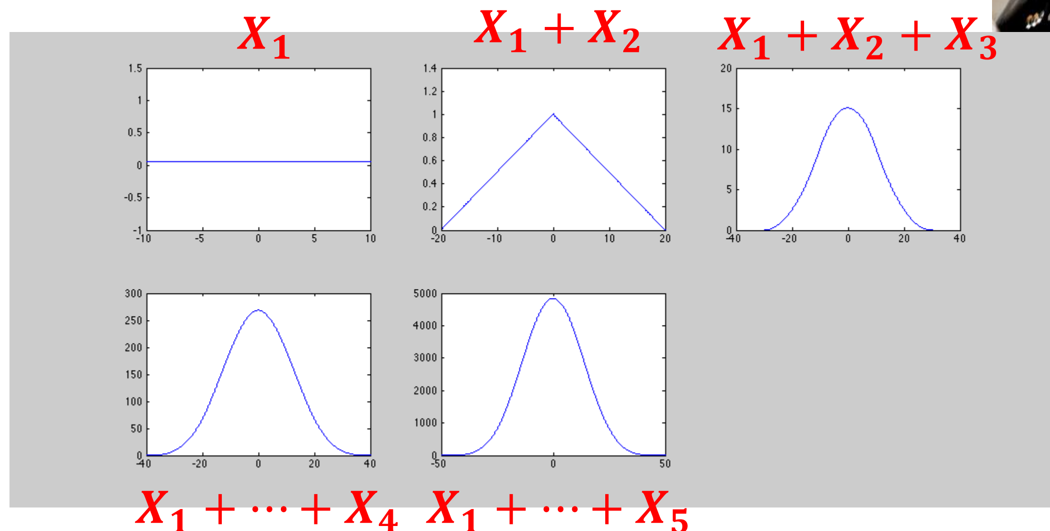


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:



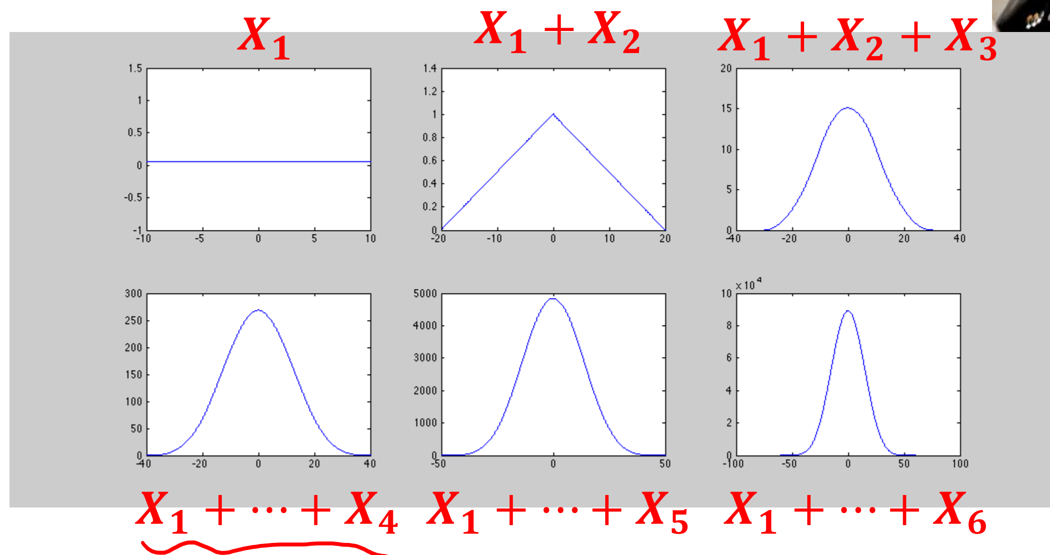


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 連續隨機變數和



PDF:



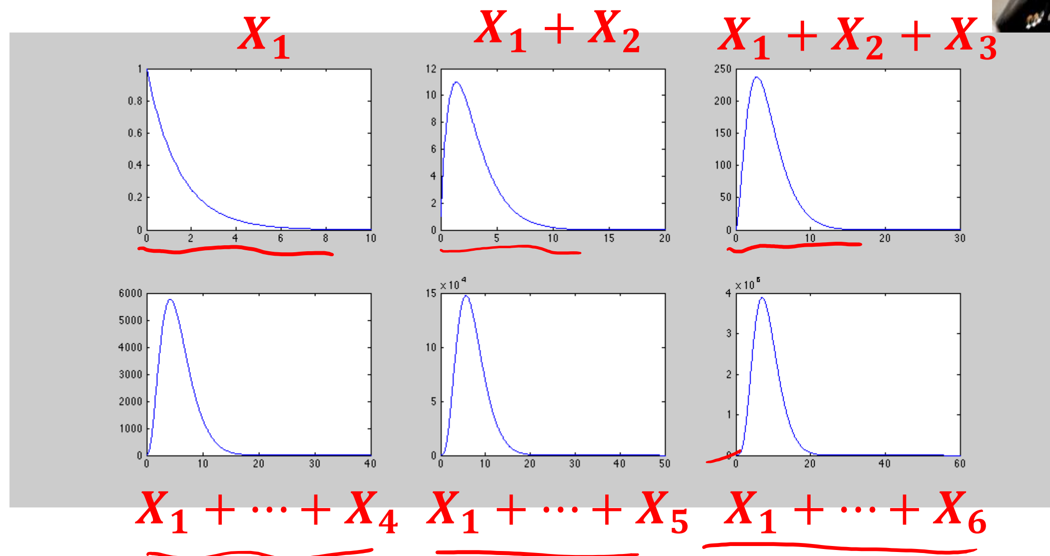


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Exponential 隨機變數和



PDF:



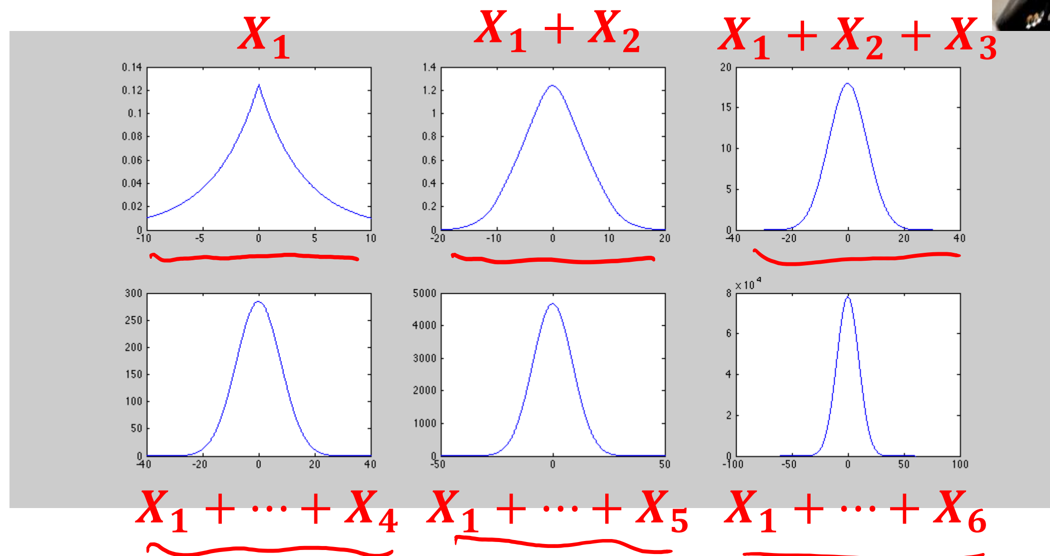


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Laplace 隨機變數和



PDF:





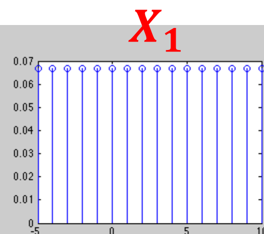
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



PMF:

X_1



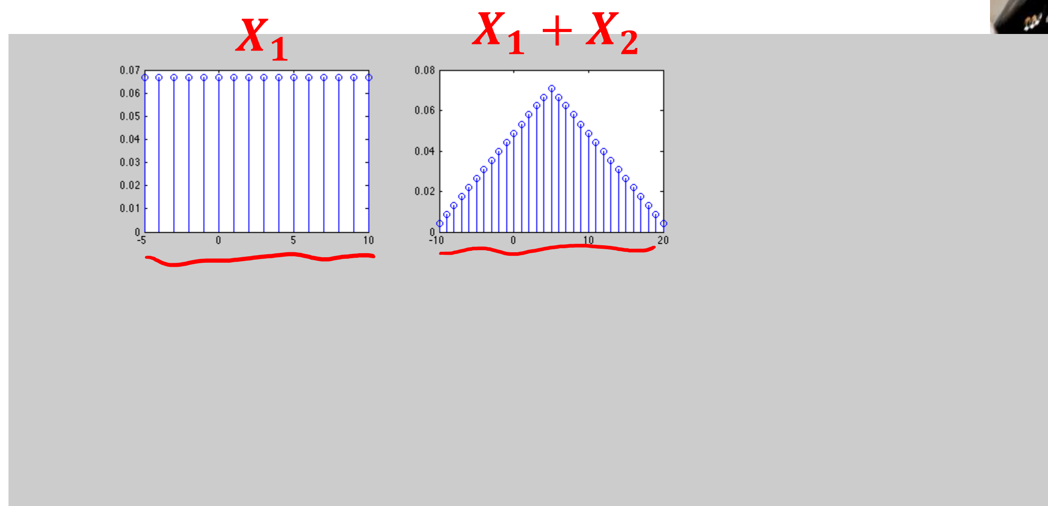


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



PMF:





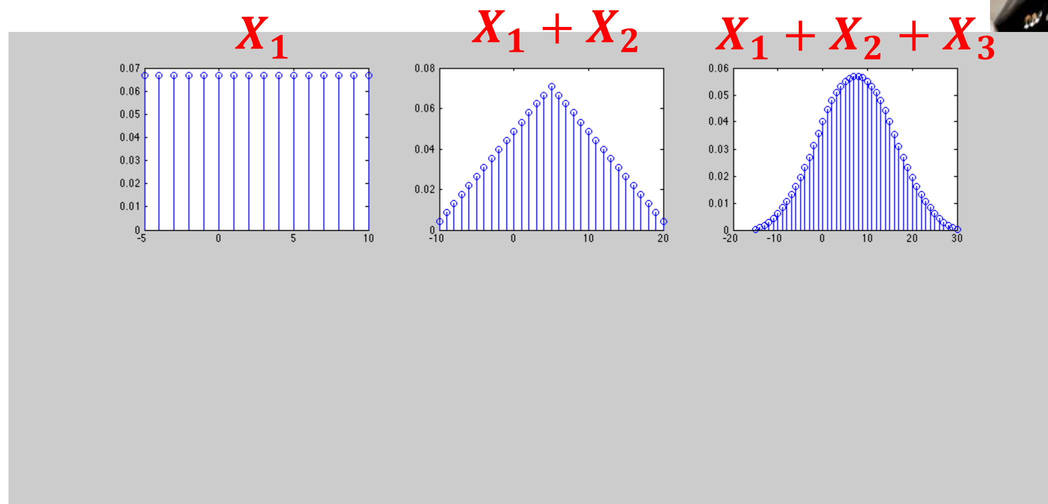
Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



X_1　　$X_1 + X_2$　　$X_1 + X_2 + X_3$

PMF:



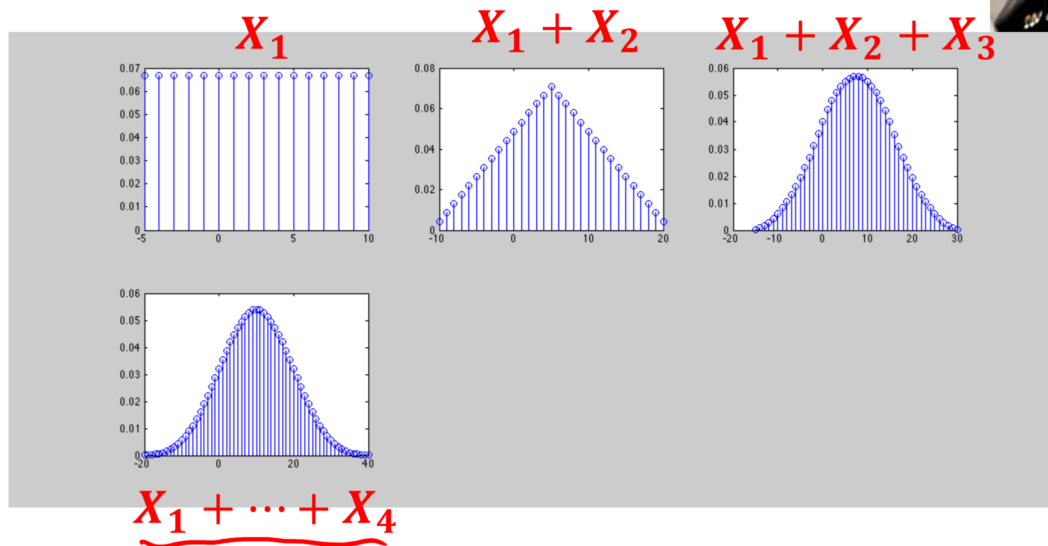


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



PMF:



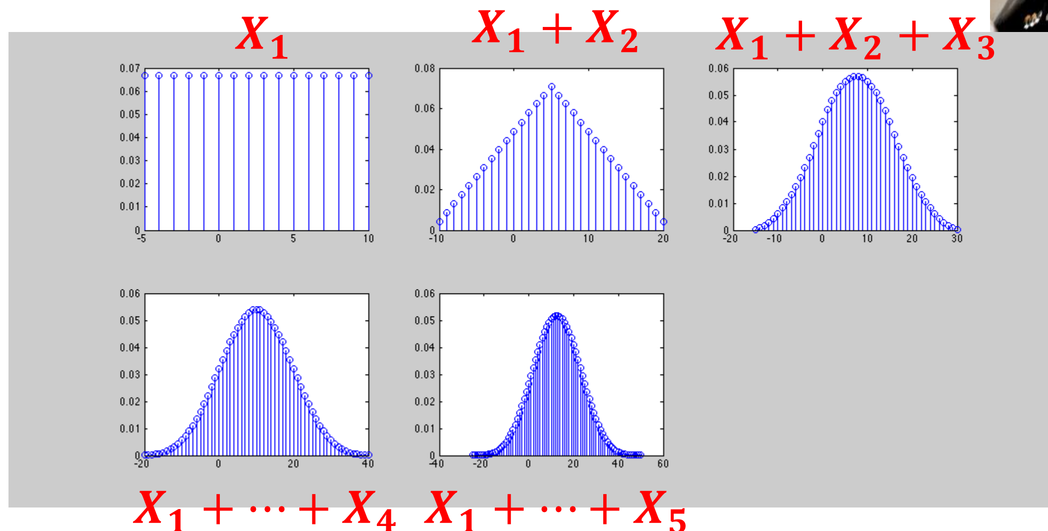


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



PMF:



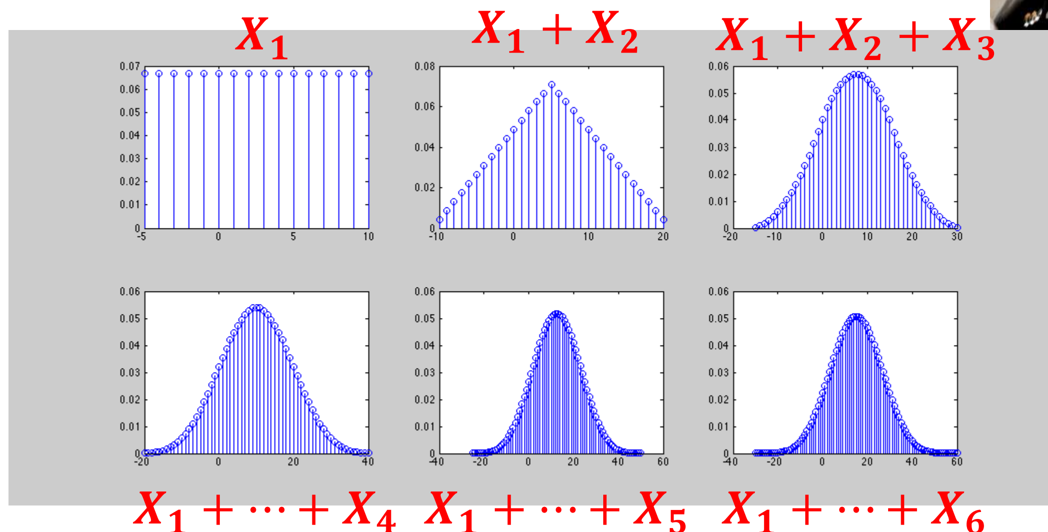


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Uniform 離散隨機變數和



PMF:



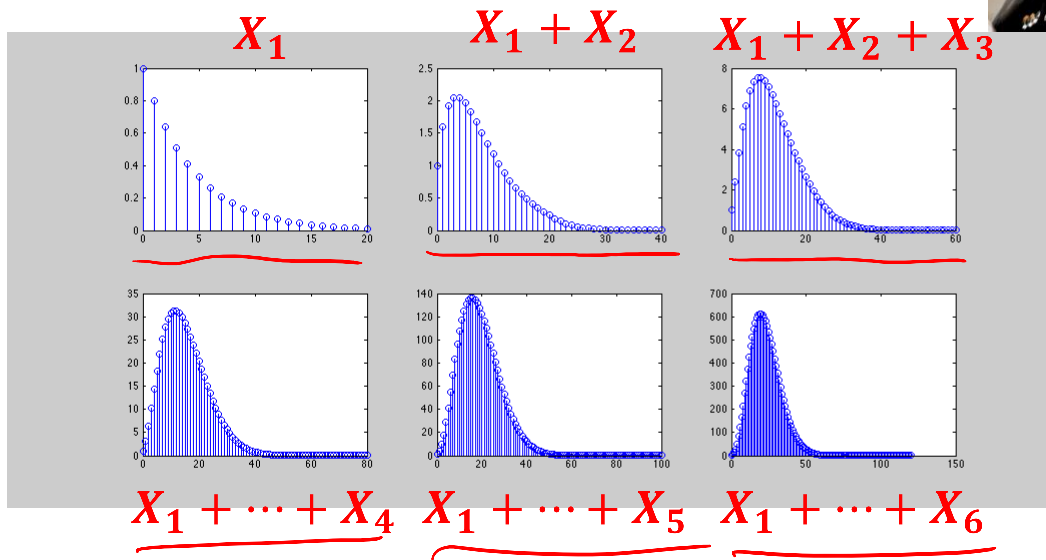


Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

數個獨立 Geometric 隨機變數和



PMF:





Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央極限定理 (Central Limit Theorem)



- 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為 $I.I.D.$，

  則當 n 趨近於無窮大時：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N\left(\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n}, \sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n}\right)$$

$$\mu_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} + \cdots . + \mu_{X_n} = n\mu_{X_1}$$

$$\sigma^2_{X_1+X_2\ldots+X_n} = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \cdots + \sigma^2_{X_n} = n\sigma^2_{X_1}$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央極限定理 (CLT) 的應用



- 當要處理多個獨立的隨機變數的和時，我們可以 CLT 將其機率分佈近似為常態分佈後計算機率
- 另若某機率分佈等同於多個獨立隨機變數的和，此機率分佈便可以用常態分佈近似之，再計算機率

例：$X \sim BIN(100, 0.3)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$

$\{X_i\}$ $I.I.D., X_i \sim Berinoulli(0.3)$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

中央極限定理 (CLT) 的應用



- Ex: 天團五五六六有百萬粉絲。每位粉絲各自獨立，但有 0.2 的機率會買天團發片的 CD。若是天團發精選輯，請問天團精選輯發售超過 200,800 張之機率為何？

$$X \sim BIN(1000000, 0.2) \Rightarrow P(X > 200800) = \sum_{x=200801}^{10^6} \binom{1000000}{x} 0.2^x 0.8^{10^6 - x}$$

$$\binom{1000000}{200801} = \frac{1000000!}{200801!\,799199!}$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000000},\ X_i \sim Bernoulli(0.2) \Rightarrow \mu_{X_1} = 0.2, \sigma_{X_1}^2 = 0.16$$

$$By\ CLT \Rightarrow X \sim N\left(1000000 \cdot \mu_{X_1}, 1000000 \cdot \sigma_{X_1}^2\right) \Rightarrow \mu_X = 200000, \sigma_X = 400$$

$$P(X > 200800) = P\left(\frac{X - 200000}{400} > \frac{200800 - 200000}{400}\right) = P(Z > 2) = Q(2) \cong 0.023$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X 是離散的隨機變數和…



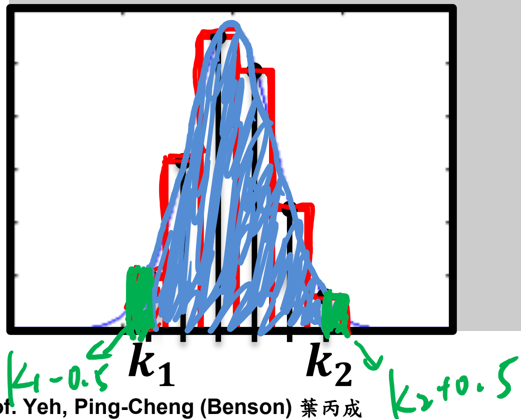
- 我們可以算的更精確！ $X = X_1 + \cdots + X_n$
- De Moivre – Laplace Formula:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx P\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \leq \frac{X - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}} \leq \frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{k_2 + 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - 0.5 - n\mu_{X_1}}{\sqrt{n}\sigma_{X_1}}\right)$$

$$= p_X(k_1) + p_X(k_1+1) + \cdots + p_X(k_2)$$

$$= 1 \cdot p_X(k_1) + 1 \cdot p_X(k_1+1) + \cdots + 1 \cdot p_X(k_2)$$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

若 X 是離散的隨機變數和…



- Ex:萱萱為 5566 忠實粉絲，幫粉友去 20 家店買 CD。每家店限購一張，缺貨機率 0.5。請問萱萱買到 7 張之機率為？

$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow p_X(7) = \binom{20}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^{13} = 0.0739$

用中央極限定理估算：

$X \sim BIN(20, 0.5) \Rightarrow X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20},$

$\{X_i\}\ I.I.D., X_i \sim Bernoulli(0.5), \mu_{X_1} = 0.5, \sigma_{X_1}^2 = 0.25$

$\Rightarrow X \sim N(20 \cdot 0.5, 20 \cdot 0.25) = N(10, 5)$

$\Rightarrow P_X(7) = P(7 \le X \le 7) = \Phi\left(\frac{7.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{6.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) = 0.0732$



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University

本週回顧



- 隨機變數的和的機率分佈？
- 為何要學MGF？
- 多個隨機變數之和如何找機率分佈？
- 中央極限定理(萬佛朝宗)



Prof. Yeh, Ping-Cheng (Benson) 葉丙成
Dept. of EE, National Taiwan University